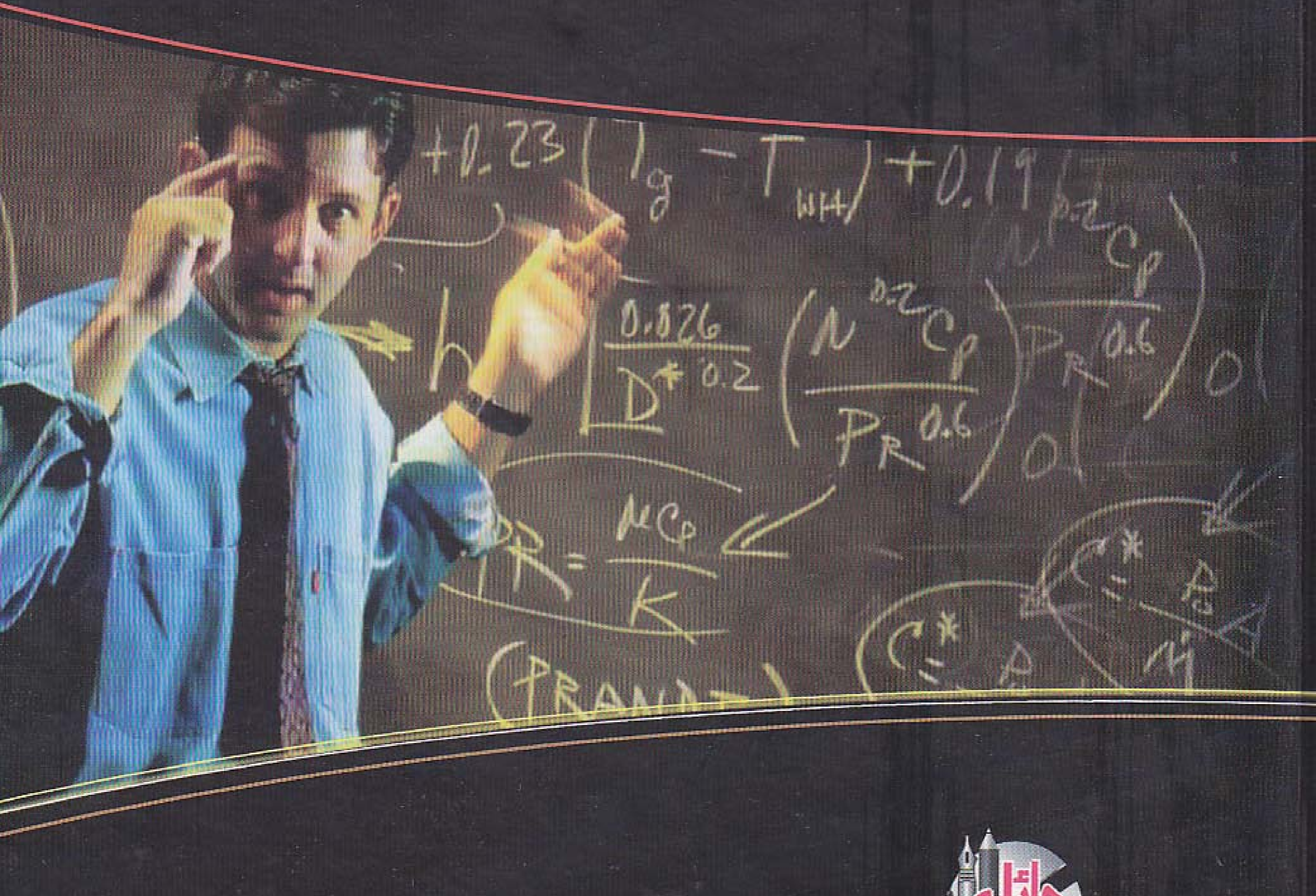
الرياضيات

للعلوم الإدارية والمالية

فتحي خليل حمدان

جامعة البترا



الرياضيات
للعلوم الإدارية والمالية

فتحي خليل حمدان
جامعة البترا

الطبعة الثانية
2009
دار وائل للنشر

رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية : (2005/9/2223)

حمدان ، فتحي خليل

الرياضيات للعلوم الادارية والمالية / فتحي خليل حمدان .

- عمان ، دار وائل ، 2005 .

(252) ص

ر.إ. : (2005/9/2223)

الواصفات: الرياضيات / العلوم الادارية / الاقتصاد المالي / المحاسبة المالية

* تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

****

رقم التصنيف العشري / ديوي : 510

(ردمك) ISBN 9957-11-640-1

* الرياضيات للعلوم الإدارية والمالية

* فتحي خليل حمدان

* الطبعــة الأولى 2006

* الطبعــة الثانية 2009



دار وائــل للنشر والتوزيع

• الأردن – عمان – شارع الجمعية العلمية الملكية – مبنى الجامعة الاردنية الاستثماري رقم (2) الطابق الثاني

هـاتف : 00962-6-5338410 – فاكس : 00962-6-5331661 - ص. ب (1615 - الجبيهة)

• الأردن – عمـان – وسـط البـلد – مجمـع الفحيص التجـاري- هــاتف: 00962-6-4627627

www.darwael.com

E-Mail: Wael@Darwael.Com

بسم الله الرحمن الرحيم

قال تعالى :

(سبحانك لا علم لنا إلا ما علمتنا إنك أنت العليم الحكيم)

صدق الله العظيم

الفهرس

المقدمـــة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام عـلى أصـدق المرسـلين سـيدنا محمـد خـاتم النبيين وعلى آله وصحبه ومن تبعه إلى يوم الدين.

بعد التوكل عـلى الله العـلي القـدير شرعـت في كتابـة هـذا المؤلـف والموجـه لاخواننـا الطلبـة في الكليات الادارية والمالية في الجامعات وحاولت أن تكون فقراتـه سـهلة العـرض وبسـيطة ليتسـنى لطالبنـا العزيز وقارئ هذا الكتاب من فهم محتواه بيسر وسهولة وسـنرى أن هـذا الكتـاب يتضـمن سـتة وحـدات الاولى فيها تتحدث عن المجموعات والاقترانات والثانية عن المعادلات والمتباينات. أما الثالثة فتعطينا فكـرة موجزة عن المتتاليـات والرابعـة تتحـدث بأسـهاب عـن المصـفوفات والمحـددات. والخامسـة تتحـدث عـن التفاضل وتطبيقاته واخيراً وليس أخراً الوحدة السادسة التي تعطينا فكرة عـن التكامـل وحاولـت في هـذه الوحدات أن أثري موضوعاتها بالأمثلة المتنوعة وبالأسئلة أيضاً في نهاية كل وحدة.

وفي الختام لا يسعني إلا أن أشـكر كـل مـن سـاهم في إخـراج هـذا الكتـاب إلى القـارئ الكـريم. واتمنى على زملائي أعضاء الهيئة التدريسية في الجامعات أن لا يبخلـوا عـلي بالنصـح والارشـاد وتنبيهـي إلى الاخطاء الموجودة فيه إن وجدت ولهم مني جزيل الشكر والعرفان.

المؤلف

الوحدة الأولى
المجموعات والاقترانات

Sets and Functions

الوحدة الأولى

المجموعات والاقترانات

Sets and Functions

أولاً: المجموعات Sets

تعريف:

المجموعة هي عدد من العناصر بينها صفات مشتركة تكتب بين حاصرتين { } وتسمى بأحد الحروف الهجائية الكبيرة: A, B, C, ...

ومن الأمثلة على المجموعات

$A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 \}$

$B = \{ a , b , c , d , e \}$

$C = \{ 1 , x , x^2 , x^3 , ... \}$

أما العناصر في المجموعات فتسمى بحروف هجائية صغيرة كما في المجموعة B والعنصر في المجموعة يكتب على الصورة

($a \in B$) وتقرأ العنصر a ينتمي إلى المجموعة B .

($5 \notin A$) تعني أن 5 ليست عنصر في A .

وتكتب المجموعة بطريقتين :

أ- ذكر العناصر: وتكتب المجموعة بذكر عناصرها كافة.

مثال : المجموعة التالية مكتوبة بذكر عناصرها

$A = \{ 0 , 1 , 3 , 5 , 7 , 9 \}$

ب- الصفة المميزة: تكتب المجموعة عن طريق جملة تعرف عناصر المجموعة وليس ذكر عناصرها.

مثال: اكتب المجموعات التالية بذكر عناصرها

$A = \{ x \in N : 3 \leq x \leq 10 \}$

$B = \{ x \in R : 0 < x \leq 1 \}$

الحل:

A = { 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 }

B = (0 , 1]   الفترة

أنواع المجموعات : Kinds of Sets

1- المجموعة الخالية : empty set

المجموعة التي لا تحوي أي عنصر ويرمز لها بالرمز ϕ أو { } .

2- المجموعة المنتهية : finite set

المجموعة التي تكون عناصرها محدودة .

مثال: المجموعات التالية مجموعات منتهية

1- A = { 2 , 4 , 6 , 8 }

2- B = { 10 , 20 , 30 , 40 , 50 , 60 }

3- C = { x , y , z , w , u }

3-المجموعة غير المنتهية : Infinite set

المجموعة التي تكون عناصرها غير محدودة .

مثال : المجموعات التالية مجموعات غير منتهية :

1- A = { 10 , 20 , 30 , ... }

2- B = { x : عدد طبيعي فردي x }

3- C = { x ∈ R : 0 ≤ x ≤ }

4- المجموعة الكلية : Universal set

وهي مجموعة كل العناصر قيد الدراسة ويرمز لها بالرمز U وتعطى ضمن السؤال أو الدراسة.

5-المجموعة الجزئية : Subset

تكون A مجموعة جزئية من المجموعة B اذا كانت جميع عناصر A موجودة في B وتكتب على الصورة $A \subseteq B$ وتقرأ A محتواه في B .

وتكتب بصورة رياضية على النحو

$A \subseteq B = \{ x \in A \rightarrow x \in B \}$

مثال:

اي المجموعات التالية تمثل مجموعة جزئية من المجموعة الكلية:

$U = \{ 1 , 2 , 3 , ... , 10 \}$

1- $A = \{ 1 , 3 , 5 , 7 , 9 \}$

2- $B = \{ 0 , 2 , 4 , 6 \}$

3- $C = \{ 2 , 4 , 6 , 8 , 10 \}$

4- $D = \{ -1 , 1 , -2 , 2 , -3 , 3 \}$

5- $E = \{ 1, 2 , 3 , ... , 10 \}$

الحل:

A مجموعة جزئية من u $\Leftarrow$ 1- $A \subseteq U$

B ليست مجموعة جزئية من u $\Leftarrow$ 2- $B \not\subset U$

C مجموعة جزئية من u $\Leftarrow$ 3- $C \subseteq U$

D ليست مجموعة جزئية من u $\Leftarrow$ 4- $D \not\subset U$

E مجموعة جزئية من u $\Leftarrow$ 5- $E \subseteq U$

نلاحظ من خلال المثال السابق أن : B ليست مجموعة جزئية من U وذلك لأن $o \notin U$ بينما $o \notin B$ وايضا E مجموعة جزئية من U وهي تحوي جميع عناصر U ، أي U مجموعة جزئية من U حيث تكون المجموعة مجموعة جزئية من نفسها.

5-متمم المجموعة :

متمم المجموعة A هو مجموعة كل العناصر الموجودة في المجموعة الكلية U وغير موجودة في A ويرمز لها بالرمز $\overline{A}$

مثال :

اذا كانت $U = \{-3, -2 ,-1, 0 , 1, 2, 3 \}$ وكانت $A = \{-3 , -2 , -1 \}$ فما هي $\overline{A}$

الحل:

$\overline{A} = \{ 0 , 1 , 2 , 3 \}$

تساوي المجموعات :

تكون المجموعتان A , B متساويتان اذا كانت

$$A \subseteq B \ , \ B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad A = B$$

أما المجموعتان المتكافئات فهما المجموعتان اللتان تتساويان في عدد عناصرهما وتكتب على الصـورة $A \equiv B$

مثال:

أي من الازواج التالية متكافئ وايها متساوي وأيها غير ذلك:

1- $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 1, 2, 4\}$

2- $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{a, b, c\}$

3- $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{x, y, z, w\}$

الحل :

1- $A = B$

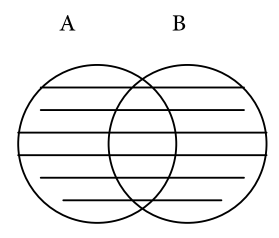
2- $A \equiv B$

3- $A \neq B$, $A \equiv B$

العمليات على المجموعات : Operation on Sets

1-الاتحاد : Union

يرمز للاتحاد وبالرمز U وعليه فان A U B تعنى العناصر الموجودة في A أو في B . وتمثل باشكال فن



مثال:

اذا كانت $A = \{2 , 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ ، $B = \{8, 10, 12, 14, 16\}$

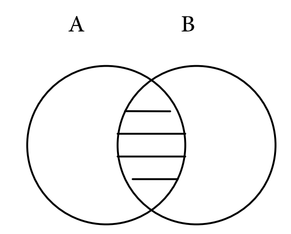
احسب $A \bigcup B$

الحل:

$A \bigcup B = \{ 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16 \}$

2- التقاطع : Intersection

يرمز للتقاطع بالرمز $\bigcap$ وتكون $A \bigcap B$ العناصر المشتركة بين A و B . ويمثل باشكال فن



مثال:

اذا كانت $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$ ، $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، احسب $A \bigcap B$

الحل :

$A \bigcap B = \{ 2 , 3 , 4 \}$

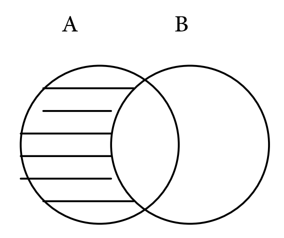
الفرق :

يرمز للفرق بين مجموعتين باشارة (-)

A-B = العناصر الموجودة في A وغير موجودة في B

$A - B = \{ x : x \in A \quad \wedge \quad x \notin B \}$

وتمثل باشكال فن



مثال:

اذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ فجد $A - B$, $B - A$

الحل:

$A - B = \{1, 3\}$

$B - A = \{6, 8\}$

مجموعات الاعداد : Sets of numbers

1- مجموعة الاعداد الطبيعية: Natural numbers

وهي أصغر مجموعات الاعداد وتسمى أيضا مجموعة العد وتحتوي على الاعداد الصحيحة الموجبة.

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

2- مجموعة الاعداد الصحيحة: Ineger numbers

هي مجموعة الاعداد الموجبة والسالبة بالإضافة إلى الصفر

$\mathbf{I} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

3- مجموعة الاعداد النسبية: Rational numbers

العدد النسبي هو العدد الذي يكتب على الصورة $\frac{a}{b}$ بحيث $a,b \in I$ ، $b\neq0$ ، $(a,b)=1$ وتحوي مجموعة الاعداد الصحيحة بالاضافة الى الكسور مثل

$\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{7}{6},\frac{8}{10},\frac{9}{1},\frac{14}{1},.........$

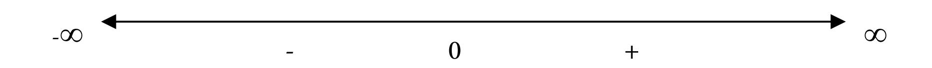
ويرمز لها بالرمز Q .

4- مجموعة الاعداد غير النسبية Irrational numbers

العدد غير النسبي: العدد الذي لا يمكن كتابته على الصورة $\frac{a}{b}$ بحيث $a,b\in I$ ، $b\neq0$ ، $(a,b)=1$ ، مثل جذور الاعداد التي ليست مربع كامل $\sqrt{2},\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{20},.......$

5- مجموعة الاعداد الحقيقية : Real numbers

وتحوي مجموعة الاعداد النسبية وغير النسبية ويرمز لها بالرمز **R** . وتمثل بخط مستقيم يسمى خط الاعداد حيث يمتد من طرفيه من ∞- إلى ∞ ومنتصفه تكون نقطة الصفر وعلى يسار الصفر الاعداد السالبة وعلى يمينه الاعداد الموجبة كالآتي:



وأي جزء من هذا الخط يكون مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية ويسمى فترة.

الفترة : Interval

تعرف الفقرة كما ذكرنا سابقا بانها مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية وهي الاعداد التي تمتد من النقطة a إلى النقطة b وتكتب حسب نوعها كالآتي:

1-الفترة المفتوحة : Open Interval

$(a , b) : \{ x \in \mathbf{R} : a < x < b \}$

2- الفترة نصف المغلقة (نصف المفتوحة) :

Half closed (Half open) Interval

$[a , b) = \{ x \in \mathbf{R} : a \le x < b \}$

3- الفترة المغلقة : Closed Interval

$[a , b] = \{ x \in \mathbf{R} : a \le x \le b \}$

مثال:

مثل الفترات التالية على خط الاعداد

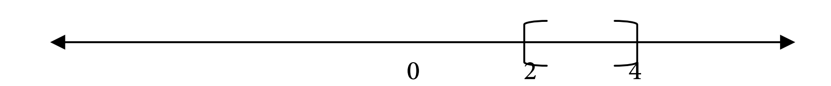
1- $[2 , 4]$

2- $[- 1 , 3)$

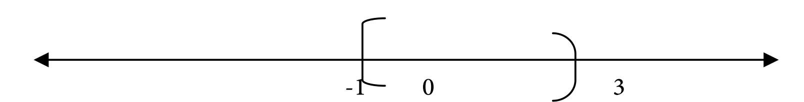
3- $(-10 , -7)$

الحل:

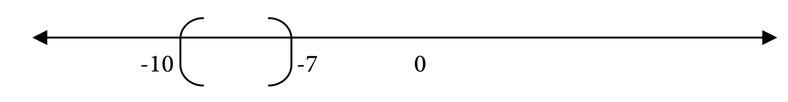
1-



2-



3-



مثال:

اذا كانت الفترات $A = [-2, 3)$, $B = [1, 4]$ فاحسب ما يلي:

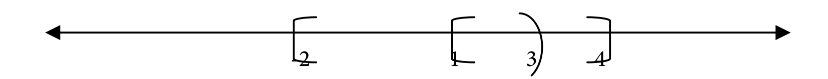
1- $A \cap B$

2- $A \cup B$

3- $A - B$

4- $B - A$

الحل:



1- $A \cap B = [1, 3)$

2- $A \cup B = [-2, 4]$

3- $A - B = [-2, 1)$

4- $B - A = [3, 4]$

بعض قوانين المجموعات :

1- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

2- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

3- $(\bar{A} \cup \bar{B}) = \overline{(A \cap B)}$

4- $(\bar{A} \cap \bar{B}) = \overline{(A \cup B)}$

5- $A - B = A \cap \bar{B}$

6- $\bar{U} = \phi$

7- $\bar{\phi} = U$

8- $\bar{\bar{A}} = A$

مثال:

اذا كانت U= {0 , 1, 2, 3, ... ,10} وكانت C= {6, 7, 8, 9, 10} ،

B={1, 2, 3, 4, 5} ، A = {2, 4, 6, 8, 10} فجد ما يلي:

1- $A \cup B$

2- $A \cap C$

3- $\overline{A} \cap \overline{B}$

4- $B \cup C$

5- $A \cap \overline{C}$

6- $A - (B \cap C)$

7- $(\overline{A} \cup B) - C$

8- $\overline{(\overline{B} \cap \overline{C})}$

الحل:

1- $A \cup B = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10 \}$

2- $A \cap C = \{ 6 , 8 , 10 \}$

3- $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B} = \{ 0, 7 , 9 \}$

4- $B \cup C = \{ 1, 2, 3, 4 , 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

5- $A \cap \overline{C} = A - C = \{ 2, 4 \}$

6- $A - (B \cap C)$

$B \cap C = \phi$

$A - (B \cap C) = A - \phi = A$

7- $(\overline{A} \cup B) - C$

$\overline{A} = \{0, 1, 3, 5, 7, 9 \}$

$\overline{A} \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

$(\overline{A} \cup B) - C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

8- $\overline{(\overline{B} \cap \overline{C})} = \overline{\overline{(B \cup C)}} = B \cup C$

$B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ثانياً: الاقترانات : Functions

وسنقتصر في وحدتنا هذه على دراسة بعض أنواع الاقترانات الحقيقية. والاقـتران الحقيقـي Real functions هو الاقتران المعرف من مجموعة الاعداد الحقيقية الى مجموعة الاعداد الحقيقية. أي $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

إقتران كثير الحدود: Polynomial functions

الاقتران على الصورة

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a$$

يسمى اقتران كثير حدود حيث

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a$ أعداد حقيقية وتسمى معاملات كثير الحدود، n : عدد طبيعي.

والمقدار ($a_r x^r$) يسمى الحد الرائي من حدود كثير الحدود.

وتكون درجة كثير الحدود بقيمة أعلى أس لـ (x) في الاقتران

مثال:

ما هي درجة كل من الاقترانات كثيرة الحدود التالية:

1- $f(x) = 3$

2- $f(x) = 3x - 4$

3- $f(x) = x^2 - x + 1$

4- $f(x) = x^3 + x^7 + 5x - 7$

5- $f(x) = 2 - 3x + x^3$

الحل:

1- الدرجة الصفرية ويسمى أيضاً اقتران ثابت.

2- الدرجة الاولى ويسمى ايضا اقتران خطي.

3- الدرجة الثانية أو إقتران تربيعي.

4- الدرجة السابعة.

5- الدرجة الثالثة أو اقتران تكعيبي.

العمليات الحسابية على كثيرات الحدود:

1- الجمع والطرح:

يتم جمع (طرح) كثيري حدود بجمع (طرح) معاملات المتغيرات المتشابهة الأسس

مثال: جد ناتج ما يلي:

1- $(3x^3 - 4x^2 + 6) + (x^4 - 2x^3 - 4x + 3)$

2- $(6x^5 + 3x^3 - 4x + 5) - (3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7)$

الحل:

1- $(3x^3 - 4x^2 + 6) + (x^4 - 2x^3 - 4x + 3) = x^4 + x^3 - 4x^2 - 4x + 9$

2- $(6x^5 + 3x^3 - 4x + 5) - (3x^5 + x^4 - 2x^2 - 4x + 7) = 3x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 - 2$

2- الضرب:

يتم ضرب كثيري حدود $f(x)$، $h(x)$ بضرب كل حد من حدود $f(x)$ بكافة حدود $h(x)$.

مثال:

اذا كان $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$، وكان $h(x) = (x^2 + 2x - 1)$ فجد $(f.h)(x)$

الحل:

$$(f. h)(x) = (3x^2 - 5x + 4)(x^2 + 2x - 1)$$

$$= 3x^4 + 6x^3 - 3x^2 - 5x^3 - 10x^2 + 5x + 4x^2 + 8x - 4$$

$$= 3x^4 + x^3 - 9x^2 + 13x - 4$$

3- القسمة:

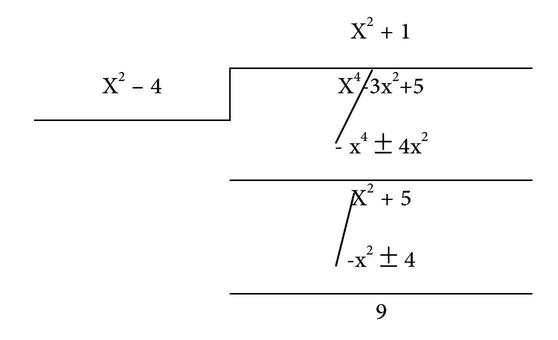
يتم قسمة كثيري حدود باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة

مثال: اذا كان

$h(x) = x^2 - 4$ $\quad\quad$ $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

فجد $f(x) \div h(x)$ باستخدام خوارزمية القسمة الطويلة

الحل:



يكون ناتج القسمة $x^2 + 1$

وباقي القسمة 9

تمثيل كثيرات الحدود بيانياً:

يتم تمثل كثيرات الحدود بيانياً باخذ قيم للمتغير x وايجاد ما يقابلها من قيم $y = f(x)$ واخذ نقاط تقاطع الاقتران مع محور x ومحور y ان أمكن ذلك.

مثال :

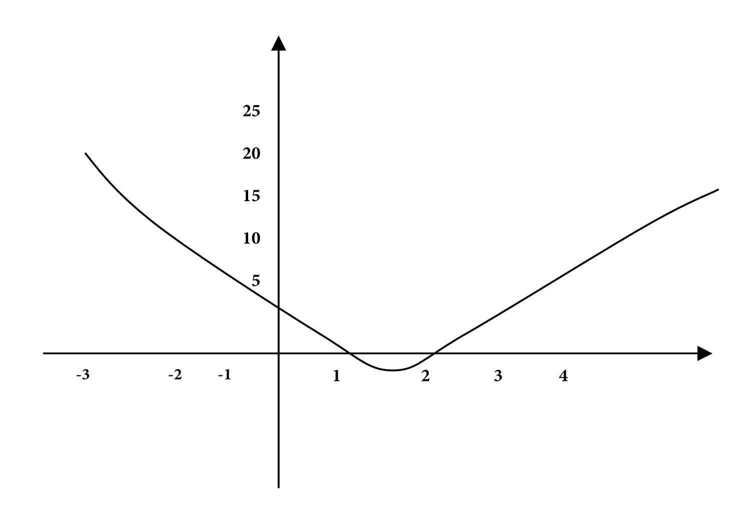
مثل الاقتران $f(x) = x^2 - 3x + 2$ بيانياً

الحل:

نأخذ قيم لـ x ونجد منها y كما في الجدول التالي:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	**4**
f(x)	20	12	6	2	0	0	2	6

نلاحظ من الجدول أن الاقتران يقطع محور الصادات عند النقطة (0، 2) وبالتالي يكون رسم الاقتران هو



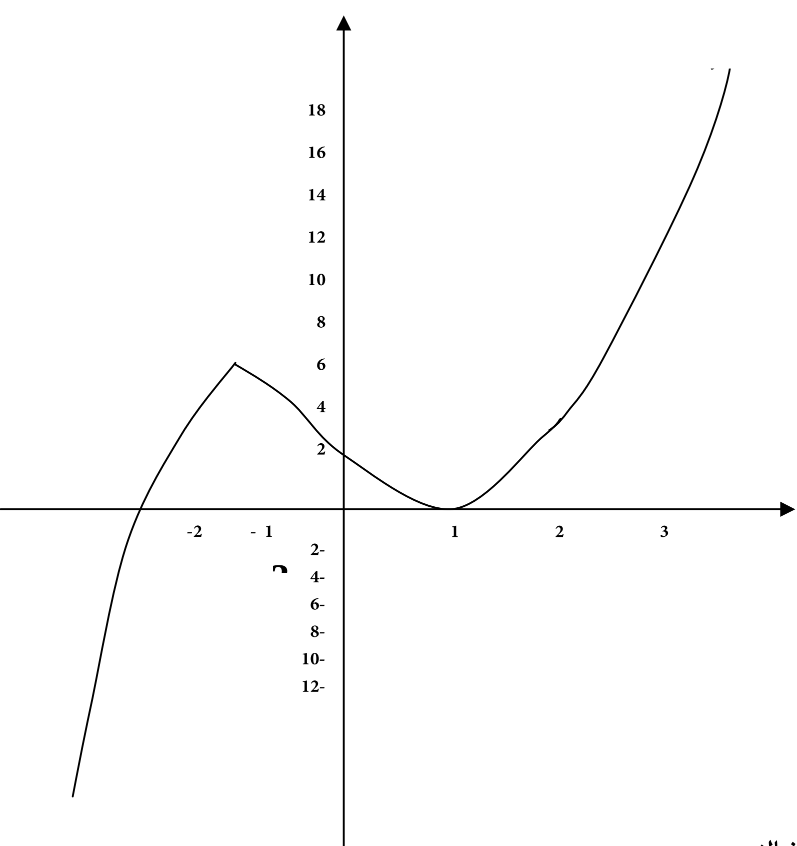
مثال :

مثل الاقتران $f(x) = x^3 - 4x + 3$ بيانياً

الحل:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-12	3	6	3	0	3	18

يقطع محور y عند النقطة (0،3) ويقطع محور x عند النقطة (1،0) وفي الفترة (-3، -2)



الاقتران النسبي:

الاقتران النسبي هو اقتران مكون من كثيري حدود على شكل بسط ومقام على الصورة كثير الحدود

$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, $h(x) \neq 0$, $g(x)$, $h(x)$ كثيري حدود

مثال:

ما هو مجال كل من الاقترانات النسبية التالية:

1- $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

2- $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

3- $f(x) = \frac{2x-3}{\sqrt{x^2-4}}$

الحل:

1- يكون الاقتران النسبي معرف على الاعداد الحقيقية عدا اصفار المقام وفي هذا الاقتران لا يوجد عدد حقيقي يجعل المقام صفر، ∴ مجال الإقتران = **R**

2- نساوي المقام بالصفر فيكون $x - 1 = 0 \Leftarrow x = 1$

∴ المجال **R** / {1}

3- يكون الاقتران معرف عندما يكون $x^2 - 4 > 0$

ولإيجاد مجال الاقتران نجعل $x^2 - 4 = 0$ ونبحث في اشارة الاقتران

$x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$



∴ يكون الاقتران موجب على **R** / [-2, 2]

وهذا هو مجال الاقتران النسبي

مثال:

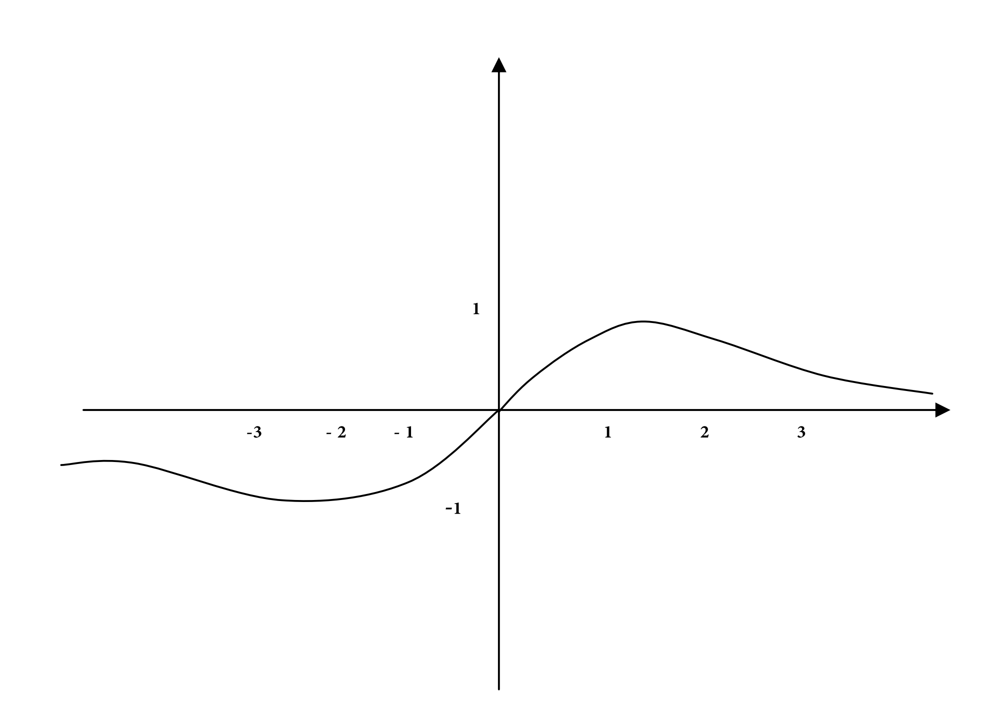
ارسم منحنى الاقتران

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

الحل:

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

x	3	2	1	0	-1	-2	-3
f(x)	$\frac{6}{10}$	$\frac{8}{10}$	1	0	-1	$\frac{-8}{10}$	$\frac{-6}{10}$



العمليات الحسابية على الاقترانات النسبية :

1- الجمع والطرح: نوحد المقامات كما في الاعداد

مثال: جد ناتج ما يلي:

$$\frac{x+1}{2x-5}+\frac{3x+1}{x-2}=\frac{7x^2-14x-7}{2x^2-9x+10}$$

2- الضرب: نضرب البسط في البسط والمقام في المقام

مثال:

$$\frac{2x+3}{x+1}*\frac{x-2}{3x+4}=\frac{2x^2-x-6}{3x^2+7x+4}$$

3- القسمة: نحول القسمة إلى ضرب بقلب الكسر الثاني

$$\frac{3x+2}{x^2+1}\div\frac{x+5}{x^2}=\frac{3x+2}{x^2+1}*\frac{x^2}{x+5}$$

$$=\frac{3x^3+2x^2}{x^3+5x^2+x+5}$$

إقتران القيمة المطلقة: Absolute value function

اقتران القيمة المطلقة هو اقتران مجاله الاعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة مع الصفر ، أي

$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}+ \cup \{0\}$

مثال:

اذا كانت $f(x) = |x|$ جد :

a) f(1)

b) f(-2)

الحل:

a) $f(1) = |1| = 1$

b) $f(-2) = |-2| = 2$

مثال:

أعد تعريف كل من الاقترانات التالية:

1- $f(x) = |x|$

2- $f(x) = |x^2|$

3- $f(x) = x + |x-2|$

4- $f(x) = \frac{|x|}{x}$

الحل:

1- نعيد تعريف الاقتران بحيث نضرب x في اشارة سالب اذا كانت سالبة وذلك لتتحول الى موجب واذا كانت موجبة تبقى كما هي:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

2- $f(x) = |x^2| = x^2$ نحذف اشارة القيمة المطلقة وذلك لان الاقتران التربيعي دائما موجب

$$3-\quad f(x) = x + |x-2| = \begin{cases} x + x - 2 & x \geq 2 \\ x - x + 2 & x < 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$$

$$4-\quad f(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{x}{x} & x>0\\[2mm] \dfrac{-x}{x} & x<0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

مثال:

أرسم منحنيات الاقترانات التالية :

1- $f(x) = | x |$

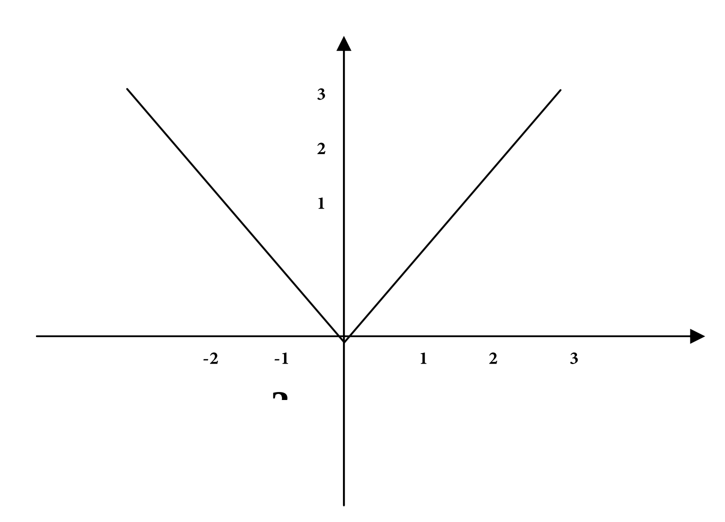
2- $f(x) = |x^2|$

3- $f(x) = x + | x - 2|$

الحل:

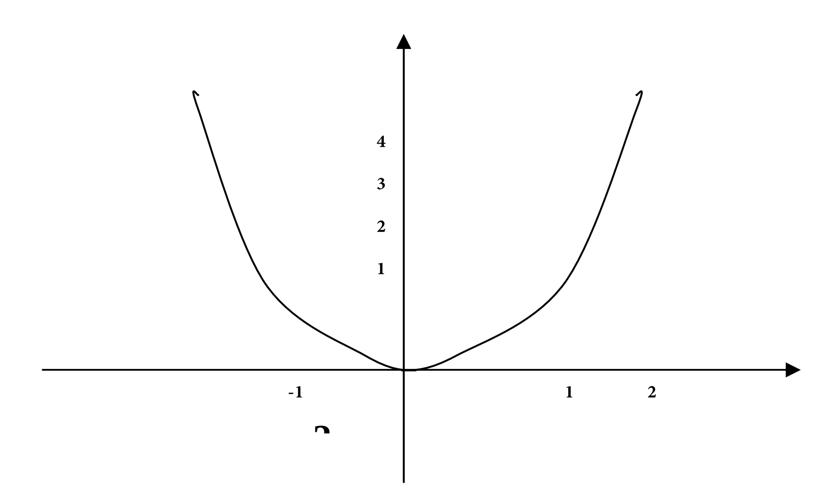
$$1-\quad f(x)=|x|=\begin{cases}x & x\geq 0\\ -x & x<0\end{cases}$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	2	1	0	1	2	3



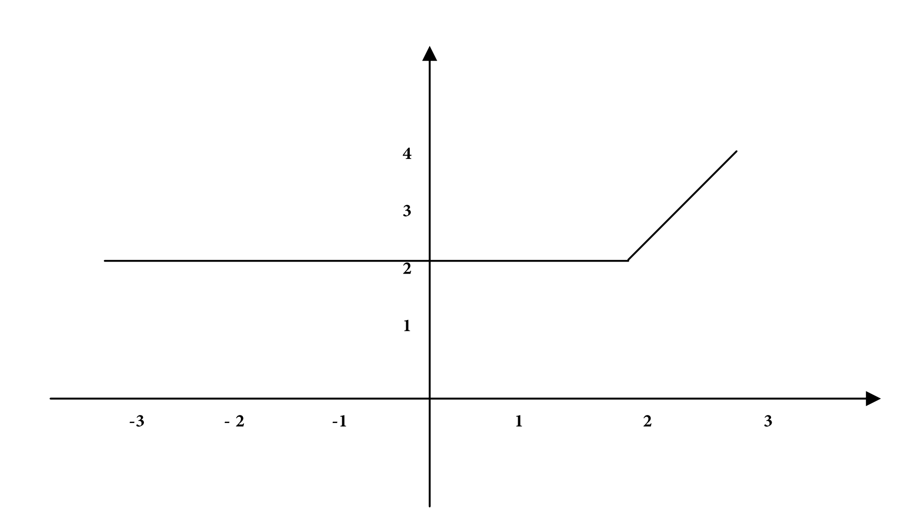
2- $f(x) = |x^2| = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	4	1	0	1	4



3- $f(x) = x + |x - 2| = \begin{cases} 2x - 2 & x \geq 2 \\ 2 & x < 2 \end{cases}$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	2	2	2	2	2	2	4



الاقتران الأسي : Exponential function

الاقتران الأسي هو اقتران مجاله الاعداد الحقيقية ومجاله المقابل الاعداد الحقيقية الموجبة أي $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{+}$

حيث $f(x) = a^{x}$

حيث a عدد حقيقي موجب. يسمى a: الاساس ، x: الاس

ومن الامثلة على الاقترانات الاسية

$f(x) = 10^{x} \qquad f(x) = e^{x} \qquad f(x) = 2^{x}$

اذا كان الاساس e فان الاقتران يسمى اقتران الاس الطبيعي $f(x) = e^{x}$

واذا كان الاساس = 10 فان الاقتران يسمى الاس العشري $f(x) = 10^{x}$

قوانين الاسس:

1- $a^{x} . a^{y} = a^{x+y}$

2- $\frac{a^{x}}{a^{y}} = a^{x-y}$

3- $(a^x)^y = a^{xy}$

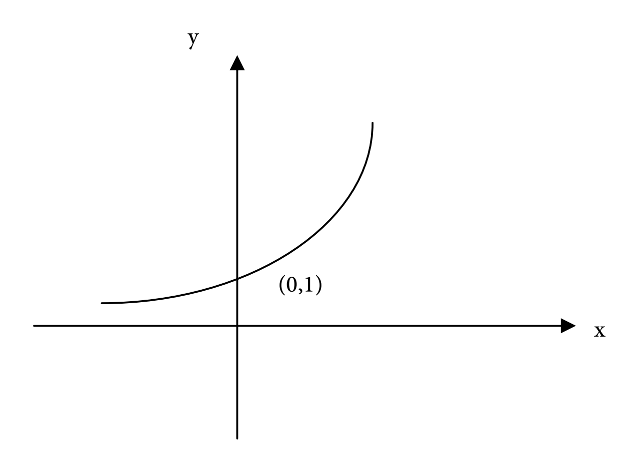
4- $a^x \cdot b^x = (ab)^x$

5- $a^0 = 1$

6- $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

7- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

ويكون التمثيل البياني للاقتران الاسي على الصورة



ونلاحظ من الرسم أن منحنى الاقتران الاسي يقطع محور y عند النقطة (1، 0) ولا يقطع محور x .

مثال:

بسط المقادير التالية إلى أبسط صورة

1- $\frac{(2^3)\sqrt[3]{4^7}}{(2^2)\sqrt[3]{4}}$

2- $\dfrac{2\left(\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{8}\right)\left(3^{4}\right)}{9\left(\sqrt{6}\right)\left(4^{2}\right)}$

3- $\dfrac{(e)\left(\sqrt{e}\right)\left(e^{2x}\right)}{\left(e^{x}\right)\left(e^{x}\right)^{-3}(e)^{\frac{3}{2}}}$

الحل:

1- $\dfrac{2^{3}\sqrt[3]{4^{7}}}{2^{2}\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\left(2^{3}\right)\left(4^{\frac{7}{3}}\right)}{\left(2^{2}\right)\left(4^{\frac{1}{3}}\right)} = 2^{3-2}\cdot 4^{\frac{7}{3}-\frac{1}{3}}$

$= 2^{1}\cdot 4^{\frac{6}{3}} = 2.4^{2} = (2)(16) = 32$

2- $\dfrac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}\cdot 3^{4}}{9\cdot\sqrt{6}\cdot 4^{2}} = \dfrac{2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{4}}{9\cdot 6^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{2}} = \dfrac{2.3^{\frac{1}{2}}\cdot.(4.2)^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{4}}{(3.3)(2.3)^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{2}}$

$= \dfrac{2\cdot 3^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{4}}{3^{2}\cdot 2^{\frac{1}{2}}3^{\frac{1}{2}}\cdot 4^{2}} = \dfrac{2.2\cdot 3^{4}}{3^{2}\cdot 2^{4}} = 2^{2-4}\cdot 3^{4-2} = 2^{-2}\cdot 3^{2} = \dfrac{9}{4}$

3- $\dfrac{(e)\left(\sqrt{e}\right)\left(e^{2x}\right)}{\left(e^{x}\right)\left(e^{x}\right)^{-3}e^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{e\cdot e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{2x}}{e^{x}e^{-3x}e^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{e^{\frac{3}{2}}\cdot e^{2x}}{e^{-2x}\cdot e^{\frac{3}{2}}}$

$= \dfrac{e^{2x}}{e^{-2x}} = e^{2x+2x} = e^{4x}$

مثال:

حل المعادلات الاسية التالية:

1- $3^{2x-1} = 243$

2- $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{16}$

الحل:

1- $3^{2x-1} = 3^5$

$\therefore 2x - 1 = 5$

$\Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$

2- $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} = \frac{1}{2^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

الاقتران اللوغاريتمي: Logarithmic function

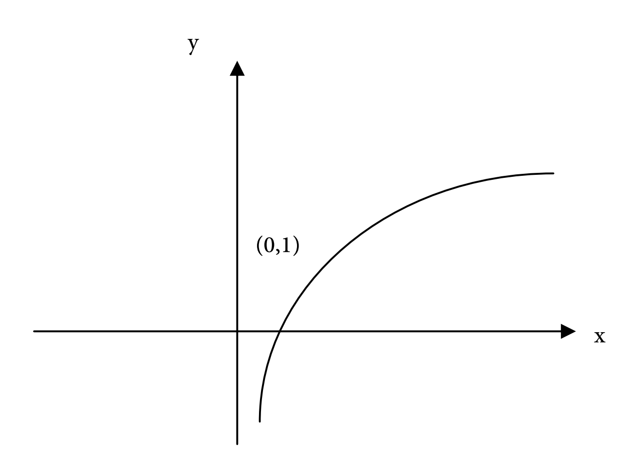
الاقتران اللوغاريتمي هو الاقتران المعكوس للاقتران الاسي وبالتالي يكون الاقتران اللوغاريتمي معرف من مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة الى مجموعة الاعداد الحقيقية

أي $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$

بحيث $f(x) = \log_a x \,,\ a \in \mathbf{R}^+$

اذا كانت $x = \log_a y \Rightarrow y = a^x$

ويكون التمثيل البياني للاقتران اللوغارتمي كما يلي:



نلاحظ أيضاً من الرسم أن منحنى الاقتران اللوغارتمي يقطع محور x عند النقطة (0، 1) ولا يقطع محـور y
.

مثال:

جد الاقتران المعكوس للاقترانات التالية:

1- $f(x) = 2^x$

2- $f(x) = e^x$

3- $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

4- $f(x) = 10^x$

الحل:

1- $f^{-1}(x) = \log_2 x$

2- $f^{-1}(x) = \log_e x$

وهذا يسمى اللوغاريتم الطبيعي ويكتب على الصورة Lnx

3- $f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

4- $f^{-1}(x) = \log_{10} x = \log x$

وهذا يسمى اللوغاريتم العشري.

لايجاد الوغاريتمات والاسس الطبيعية والعشرية تستخدم جـداول خاصـة تسـمى الجـداول اللوغارتمية أو تستخدم الالة الحاسبة .

قوانين اللوغاريتمات:

1- $\log_a x \cdot y = \log_a x + \log_a y$

2- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

3- $\log_a x^y = y \log_a x$

4- $\log_a a = 1$

5- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$

6- $\log_a 1 = 0$

7- $\log_a a^x = a^{\log_a^x} = x$

8- $\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}$

مثال:

بسط ما يلي الى ابسط صورة

1- $\frac{\log 10 + \log 100 + \log 1000}{\log 1000}$

2- $\frac{\log_2 3 + \log_2 6 - \log_2 9}{\log_2 4}$

الحل:

$$1-\ \frac{\log 10+\log 100+\log 1000}{\log 1000}=\frac{1+\log 10^2+\log 10^3}{\log 10^3}$$

$$=\ \frac{1+2+3}{3}=\frac{6}{3}=2$$

$$2-\ \frac{\log_2 3+\log_2 6-\log_2 9}{\log 4}=\frac{\log_2 3\cdot 6-\log_2 9}{\log_2 2^2}$$

$$=\ \frac{\log_2 \frac{18}{9}}{2\log_2 2}=\frac{\log_2 2}{2}=\frac{1}{2}$$

مثال:

حل المعادلة اللوغارتمية التالية:

$\text{Log}\ (x-1)^3 = \log(2) + \log(32)$

الحل:

$\text{Log}\ (x-1)^3 = \log\ (2)\ (32) = \log 64$

$\Longrightarrow 3\log\ (x-1) = \log 4^3 = 3\log 4$

$\Longrightarrow \log\ (x-1) = \log 4 \Longrightarrow x-1 = 4 \Longrightarrow x = 5$

مثال: جد اللوغاريتمات التالية باستخدام الآلة الحاسبة

1- $\log_6 10$

2- $\log_3 8$

الحل:

1- $\log_6 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 6} = 1.285$

2- $\log_3 8 = \dfrac{\ln 8}{\ln 3} = 1.893$

تمـارين

- اذا كانت $A = \{11, 15, 17, 20\}$ ، $B = \{x \in N: 10 \leq x < 20\}$ أجب عن الأسئلة (1-4)

1- $A \cap B$

2- $A \cup B$

3- $A - B$

4- $B - A$

- اذا كانت $U = \{x \in I : -10 \leq x \leq 15\}$ وكانت A, B, C ثلاثة مجموعات من U بحيث

A = { x : x عدد فردي } , B = { x : x عدد موجب }

C = {x : x عدد ليس موجب }

أجب عن الاسئلة (5-14)

5- $\overline{A}$

6- $\overline{B}$

7- $A \cup \overline{B}$

8- $B \cap \overline{C}$

9- $\overline{A} - (B - C)$

10- $(A \cup B) - \overline{C}$

11- $A \cup (B \cap C)$

12- $U - (B \cup C)$

13- $A \cap (B \cap C)$

14- $\overline{A} \cap \overline{C}$

-اذا كانت $A = [0 , 3] , B = (1, 5] , C = (2, 4)$ أجب عن الاسئلة (15-20)

15- $A \cap C$

16- $B \cup C$

17- $A \cap (B \cup C)$

18- $(A \cup B) \cup C$

19- $C - A$

20- $B - (A \cup C)$

- جد $f(0.2), f(-1), f(0)$ للاسئلة (21-25)

21- $f(x) = x^2 - 2x + 4$

22- $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$

23- $f(x) = \log\left(3x + \frac{7}{x}\right)$

24- $f(x) = e^{x^2} + |x|$

25- $f(x) = 10^x$

- جد ناتج العمليات الحسابية للاسئلة (26-33)

26- $(x^2 + x + 1) + (x^3 - 3x^2 - 2x + 5)$

27- $(4x^4 - 3x^2 + 5) - (x^2 - 5x + 3)$

28- $(2x^3 - 3x^2 + 4)(x^2 - 1)$

29- $(4x^5 - 6x^3 + x) \div (x - 2)$

30- $\frac{2x + 1}{x^2 - 2} + \frac{x + 1}{2x - 2}$

31- $\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{1 - x}{3x + 2}$

32- $\frac{x + 2}{2x - 3} \cdot \frac{x - 1}{x + 3}$

33- $\frac{2x+4}{4x+1} \div \frac{x+2}{3x-5}$

- بسط المقادير في الاسئلة (34-39) إلى ابسط صورة

34- $\frac{\left(\sqrt{32}\right)(3)^2\left(\sqrt{6}\right)}{(3)^{\frac{3}{2}}(3)(6)}$

35- $\frac{\left(2^x\right)\left(8^x\right)}{\left(4^x\right)(16)^x}$

36- $\frac{\left(5^{2e+2}\right)\left(7^{4e}\right)}{(49)^{2e}(25)^{1-2e}}$

37- $3\log_3 243 - \log_3 27 + \frac{1}{9}\log_3 \sqrt{81}$

38- $\frac{\log_7 4 + 2\log_7 \sqrt{2}}{\frac{1}{2}\log_7 8}$

39- $\log 11 + \log 30 - \log 33$

- حل المعادلات الاسية واللوغارتمية في الاسئلة (40-45)

40- $4^x - (17)\, 2^x + 16 = 0$

41- $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+6} = (81)^{-x}$

42- $(13)^{2x-1} = \frac{1}{5^{1-2x}}$

43- $\log_9 1 = x^3 - 1$

44- $\log_{\sqrt{x}} \sqrt[4]{27} = 1.5$

45- $\log_x (6x - 9) = 2$

46- اذا كانت $\left(\left((x)^{\frac{7}{4}}\left(\sqrt{x}\right)(x)^{-\frac{1}{4}}\right) \div \left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^2}\right)\right) = x^n$ فجد قيمة n .

- استخدم اللوغارتمات في تبسيط المقادير في الاسئلة (47-49)

47- $\frac{(673)(549)(13.82)}{147900}$

48- $\frac{(812)(41.5)}{431}$

49- $\sqrt[5]{0.0017}$

50- اذا كان لدى محمد مبلغ (3000) دينار، ينفق منه بحيث يتناقص المبلغ اسبوعيا بمعدل ثابت قدره 10% حسب العلاقة $C_2 = C_1 (1+P)^n$ ، حيث

المعدل الثابت = P

المبلغ الأصلي = C_1

المبلغ بعد n أسبوع = C_2

بعد كم اسبوع يصبح المبلغ نصف المبلغ الأصلي .

51- باستخدام أشكال فن أثبت أن

$A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B)$

الوحدة الثانية

المعادلات والمتباينات

Equations and Inequalities

الوحدة الثانية

المعادلات والمتباينات

Equations and Inequalities

أولاً: المعادلات Equations

يحتل موضوع المعادلات مكانة كبيرة في الرياضيات وهو من أقدم المواضيع التي طرحت للبحث، وفي وحدتنا هذه سنتطرق إلى حل المعادلات الخطية والتربيعية بالإضافة إلى حل انظمة المعادلات، نظام معادلتين بمجهولين ونظام ثلاثة معادلات بثلاث مجاهيل، ويقصد بحل المعادلة هي ايجاد قيمة المتغير أو المتغيرات الموجودة في المعادلة .

أ-حل المعادلات الخطية: Linear equation

الشكل العام للمعادلة الخطية هو: $ax + b = 0$

حيث $a, b \in R$

ويكون حل المعادلة كالآتي:

$$ax + b = 0$$

1- نضيف b- للطرفين $ax + b - b = 0 - b$

فتصبح $ax = -b$

نقسم الطرفين على a لتصبح $\frac{ax}{a} = \frac{-b}{a} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-b}{a}$

مثال:

حل المعادلات الخطية التالية:

1- $2x - 3 = 0$

2- $6x = 15$

3- $2x+1 = x-3$

الحل:

1- $2x - 3 = 0$

$+3 \quad +3$

$$\Rightarrow \frac{2x}{2} = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow x = 1.5$

2- $\frac{6x}{6} = \frac{15}{6}$

$\Rightarrow x = 2.5$

3- $2x + 1 = x-3$

$-x \quad -x$

$x + 1 = -3$

$-1 \quad -1$

$\Rightarrow x = -4$

ب- المعادلة التربيعية: Quadratic equation

المعادلة التربيعية على الصورة

$ax^2 + bx + c = 0$

ويكون حل المعادلة بعدة طرق منها:

1-الفرق بين مربعين: ويكون الحل بهذه الطريقة لحالة خاصة من المعادلات التربيعية التي تكون على الصورة $x^2 - a^2 = 0$

ويكون حلها على الصورة

$(x - a)(x + a) = 0$

$\Rightarrow x = a \,,\, x = -a$

مثال :

حل المعادلات التربيعية التالية :

1- $x^2 - 4 = 0$

2- $9x^2 - 25 = 0$

الحل :

1- $x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(x + 2) = 0$

$\Rightarrow x = 2 , x = -2$

2- $9x^2 - 25 = 0$

$\Rightarrow (3x - 5)(3x + 5) = 0$

$\Rightarrow 3x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$\Rightarrow 3x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5}{3}$

2-الاقواس :

ويكون الحل بهذه الطريقة بفتح قوسين وتوزيع x والثوابت على الاقواس.

مثال:

جد حل المعادلات التربيعية

1- $x^2 - 5x + 6 = 0$

2- $x^2 - 3x - 4 = 0$

3- $2x^2 - 3x = 5$

الحل:

1- $x^2 - 5x + 6 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

$\Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

2- $x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 1$

3- $2x^2 - 3x = 5$

$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 5 = 0$

$\Rightarrow (2x - 5)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = 2.5$

$\Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

مثال :

اكتب المعادلة التربيعية التي جذراها هما (4 ، 1-)

الحل:

نستخدم الطريقة العكسية في الحل

يكون جذرا المعادلة هما

$x = -1 \Rightarrow x + 1 = 0$

$x = 4 \Rightarrow x - 4 = 0$

$\Rightarrow (x + 1)(x - 4) = 0$

وهذه هي المعادلة التربيعية

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$

3- القانون العام:

ويكون الحل بهذه الطريقة عن طريق القانون

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويسمى المقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ بالمميز .

وهناك ثلاث حالات للحل بهذه الطريقة:

1- الحالة الأولى: اذا كان المميز ($\Delta > 0$) فيوجد حلين للمعادلة.

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2-الحالة الثانية: اذا كان المميز ($\Delta = 0$) فيوجد حل وحيد للمعادلة.

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3- الحالة الثالثة: اذا كان المميز ($\Delta < 0$) فلا يوجد حل حقيقي للمعادلة.

مثال:

حل المعادلات التربيعية التالية:

1- $x^2 + 2x - 3 = 0$

2- $3x^2 - 4x + 5 = 0$

3- $x^2 - 2x + 1 = 0$

4- $x^2 - 5x + 3 = 0$

الحل:

1- $x^2 + 2x - 3 = 0$

$a = 1 , b = 2 , c = -3$

$\Delta = (2)^2 - (4)(1)(-3) = 4 + 12 = 16 > 0$

$\therefore$ يوجد حلين للمعادلة هما:

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{(2)(1)} = \frac{-2-4}{2} = -3$$

$$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = \frac{-2+4}{2} = 1$$

2- $3x^2 - 4x + 5 = 0$

$a = 3 , b = -4 , c = 5$

$\Delta = (-4)^2 - (4)(3)(5) = 16 - 60 = -44 < 0$

$\therefore$ لا يوجد حل حقيقي للمعادلة

3- $X^2 - 2x + 1 = 0$

$a = 1 , b = -2 , c = 1$

$\Delta = (-2)2 - (4)(1)(1) = 4 - 4 = 0$

∴ يوجد حل وحيد للمعادلة هو

$$x = \frac{-(-2)}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

4- $X^2 - 5x + 3 = 0$

$a = 1 , b = -5 , c = 3$

$\Delta = (-5)^2 - (4)(1)(3) = 25 - 12 = 13 > 0$

∴ يوجد حلين للمعادلة هما

$$x_1 = \frac{-(-5) - \sqrt{13}}{(2)(1)} = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$$

$$x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$$

جـ- حل انظمة المعادلات الخطية : System of Linear equations

يكون الشكل العام لنظام المعادلات الخطية كالآتي:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

حيث m تمثل عدد المعادلات، n عدد المتغيرات.

ستكون دراستنا في هذه الوحدة متعلقة بحل نظام معـادلتين بمجهـولين وثلاثـة معـادلات بثلاثـة مجاهيل وبطريقتين الحذف والتعويض .

1- حل نظام معادلتين بمجهولين:

يكون نظام معادلتين بمجهولين على الصورة

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

ويكون الحل باحدى الطريقتين، الحذف: حيث نجعل معاملات احد المتغيرين في المعادلتين نفس القيمة ولكن باشارتين مختلفتين ثم نجمع المعادلتين ونجد منها قيمة المتغير الآخر ثم نعوض قيمته في احدى المعادلتين ونجد قيمة المتغير الأول.

مثال:

حل النظام التالي من المعادلات بطريقة الحذف

$$2x + 3y = 7 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

$$3x + 2y = 8 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

الحل:

نضرب المعادلة الأولى بـ (2-) والثانية بـ (3) لحذف المتغير y فتصبح المعادلتان

$$-4x - 6y = -14$$

$$\underline{9x + 6y = 24} \qquad \text{نجمع}$$

$$5x \quad = 10$$

$$\Rightarrow x = 2$$

تعوض قيمة x في المعادلة الثانية :

$$3(2) + 2y = 8$$

$$6 + 2y = 8$$

$$\Rightarrow 2y = 2$$

$$\therefore \; y = 1$$

أما بطريقة التعويض فيتم وضع متغير بدلالة الآخر من احدى المعادلتين ثم التعويض في المعادلة الاخرى

مثال:

حل النظام التالي من المعادلات بطريقة التعويض

$x + 3y = 2$ ……………………… (1)

$2x + 5y = 3$ ……………………... (2)

الحل:

نضع x بدلالة y من المعادلة الأولى لتصبح

$x = 2 - 3y$ ……………………….. (3)

نعوضها في المعادلة الثانية

$2(2 - 3y) + 5y = 3$

$\Longrightarrow 4 - 6y + 5y = 3$

$\Longrightarrow -y = -1$

$\therefore\ y = 1$

نعوض قيمة y في المعادلة الثالثة لايجاد قيمة x

$x = 2 - 3(1) = -1$

مثال:

حل النظام التالي من المعادلات بطريقتين :

$3x + 4y = 9$ …………………….. (1)

$2x + 3y = 7$ ……………………. (2)

الحل:

1- بطريقة الحذف

$-2 \,/\, 3x + 4y = 9$

$3 \,/\, 2x + 3y = 7$

$$-6x - 8y = -18$$

$$\underline{6x + 9y = 21} \quad \text{نجمع}$$

$$y = 3$$

نعوض في المعادلة الاولى

$$3x + 4(3) = 9$$

$$3x + 12 = 9$$

$$\Rightarrow 3x = -3$$

$$\Rightarrow x = -1$$

2- بطريقة التعويض من المعادلة (1)

$$3x = 9 - 4y$$

$$\Rightarrow x = 3 - \frac{4}{3} y$$

نعوض في المعادلة (2)

$$2(3 - \frac{4}{3} y) + 3y = 7$$

$$6 - \frac{8}{3} y + 3y = 7$$

$$\frac{1}{3} y = 1$$

$$\therefore y = 3$$

نعوض في x

$$x = 3 - \frac{4}{3}(3) = 3 - 4 = -1$$

2- حل نظام ثلاثة معادلات بثلاثة مجاهيل

يكون نظام ثلاثة معادلات بثلاثة مجاهيل على الصورة

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2x = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

ويكون الحل باحدى الطريقتين الحذف أو التعويض كما في نظام معادلتين بمجهولين.

مثال:

حل النظام من المعادلات بطريقة الحذف، ثم بطريقة التعويض

$x + y + 2z = 9$ ………………….. (1)

$2x + y + 3z = 13$ ……………….. (2)

$x + 3y - z = 4$ ………………….. (3)

الحل: 1- بطريقة الحذف

نضرب المعادلة الاولى بـ (1-) ونجمعها مع المعادلة (2)

$-x - y - 2z = -9$

$\underline{2x + y + 3z = 13}$ نجمع

$x + z = 4$ ………………. (4)

والآن نضرب المعادلة الأولى بـ (3-) ونجمعها مع المعادلة (3)

$-3x - 3y - 6z = - 27$

$\underline{x + 3y - z = 4}$

$-2x - z = -23$ ………………………. (5)

يصبح لدينا معادلتين بمجهولين

$x + z = 4$ ………………….. (4)

$-2x - 7z = -23$ ……………….. (5)

نضرب المعادلة (4) في (2) ونجمعها مع 5

$2x + 2z = 8$

$\underline{-2x - 7z = -23}$ نجمع

$-5z = -15$

$\Longrightarrow z = 3$

نعوض قيمة z في المعادلة (4)

$x + 3 = 4 \Longrightarrow x = 1$

نعوض قيمة z , x في المعادلة (1)

$1 + y + 2(3) = 9$

$y + 7 = 9 \Longrightarrow y = 2$

2- بطريقة التعويض

$x = 9 - y - 2z$ من المعادلة (1)

نعوضها في المعادلة (2)

$2(9 - y - 2z) + y + 3z = 13$

$18 - zy - 4z + y + 3z = 14$

$-y - z = -5$ ………………………….. (4)

ثم نعوضها في المعادلة (3)

$9 - y - 2z + 3y - z = 4$

$\Longrightarrow 2y - 3z = -5$ ……………………… (5)

$y = 5 - z$ من المعادلة 4

نعوضها في (5)

$2(5 - z) - 3z = -5$

$10 - 2z - 3z = -5$

$-5z = -15$

$\Longrightarrow z = 3$

نعوض في y

$$y = 5 - 3 \Rightarrow y = 2$$

نعوض في x

$$x = 9 - 2 - 2(3)$$

$$\Rightarrow x = 9 - 2 - 6$$

$$\Rightarrow x = 1$$

المتباينات: **Inequalities**

المتباينة هي أي عبارتين جبريتين يربط بينهما احدى ادوات الربط التالية ($<$) اقل مـن ($>$) اكبر من ، ($\geq$) أقل من أو يساوي ($\leq$) اكبر من أو يساوي ومن الامثلة على المتباينات:

1- $x < 2$

2- $x + 1 \leq -3$

3- $x^2 + 2x + 5 \geq 0$

تعريف:

تسمى مجموعة كل قيم (x) التي يمكن أن نعوضها في المتباينة بغض النظر عن صحتها مجموعة التعويض، وهذه المجموعة تعطى في السؤال وتكون عادة إحدى مجموعات الاعداد وفي كل امثلتنا في هـذه الوحـدة ستكون مجموعة التعويض هي مجموعة الاعداد الحقيقية "**R**" .

تعريف:

تسمى مجموعة قـيم x التـي تجعـل المتباينـة صـحيحة (أي التـي تكـون حـلاً للمتباينـة) مجموعـة الحـل للمتباينة .

مجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض .

مثال:

جد مجموعة الحل لكل من المتباينات التالية:

1- $3x - 2 > x + 1$

2- $x^2 - 5x \geq -6$

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \le 0$

4- $\frac{2x-1}{x+1} \le 0 \quad , \; x \ne -1$

الحل:

مجموعة الحل لأي متباينة تكون مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد الحقيقية

1- $3x - 2 > x + 1$

نضيف للطرفين + 2

$3x > x + 3$

نضيف للطرفين x–

$3x - x > 3$

$2x > 3$

نقسم الطرفين على 2

$x > \frac{3}{2}$

∴ تكون مجموعة الحل هي الفترة المفتوحة $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

2- $x^2 - 5x \ge -6$

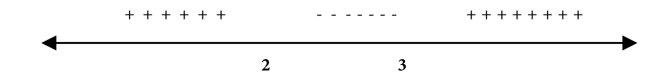
نضيف للطرفين + 6

$x^2 - 5x + 6 \ge 0$

نحلل العبارة التربيعية

$(x-3)(x-2) \ge 0$

نبحث في اشارة الاقتران عن طريق خط الاعداد وتكون اشارة الاقتران التربيعي عكس اشارة x^2 ما بين الجذرين ونفس إشارة x^2 خارج الجذرين



∴ تكون مجموعة الحل هي (∞ ، 3] U [2 ، ∞-)

3- $x^3 + 3x^2 + 2x \le 0$

نأخذ x عامل مشترك

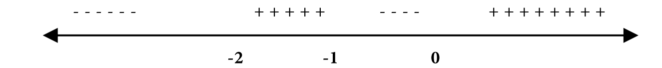
$$x(x^2 + 3x + 2) \le 0$$

نحلل العبارة التربيعية داخل القوس

$$x(x+2)(x+1) \le 0$$

فتكون جذور الاقتران هي { 2-، 1-، 0}

نحدد اشارة الاقتران على خط الاعداد

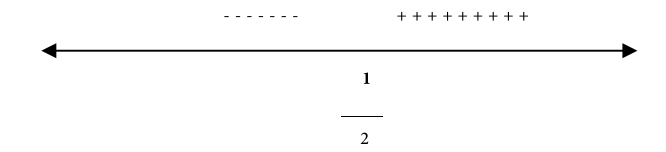


∴ تكون مجموعة الحل للمتباينة هي [0، 1-] U [2-، ∞-)

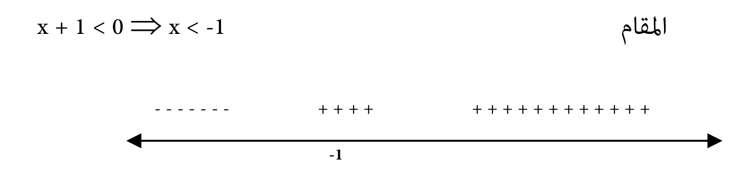
4- $\dfrac{2x-1}{x+1} < 0$

في الاقترانات النسبية نحدد اشارة البسط واشارة المقام على خط الاعداد ثم نقسم الاشارات

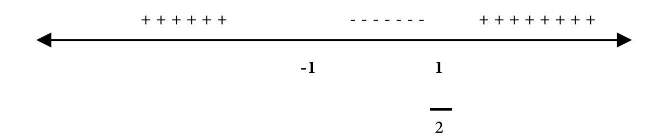
البسط $2x - 1 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{2}$



المقام $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$



القسمة



تكون مجموعة الحل للمتباينة هي الفترة المفتوحة $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

تمـــارين

- حل المعادلات في الاسئلة (1-9)

1- $7x + 5 = 19$

2- $5x + 1 = 3x - 7$

3- $\frac{2x+1}{3} = 4$

4- $x^2 - 5x = 4$

5- $x^2 = 4x - 4$

6- $x^2 + 3x + 4 = 0$

7- $x^2 - 16 = 0$

8- $4x^2 - 9 = 0$

9- $x^2 - 7 = 0$

- حل انظمة المعادلات في الاسئلة (10-13) إن وجدت

10- $3x + 4y = 12$

$8x + 5y = 22$

11- $2x + 3y = 7$

$4x + 6y = 12$

12- $2x + 3y - 5z = 17$

$x + 3z = 0$

$-4y + 2z = -10$

13- $x + y + z = 4$

$2x + 3y = 5$

$x + 2y + 3z = 9$

14- اذا كانت $ax^2 + bx + 4 = 0$ معادلة تربيعية لها الجذران (1-، 5) فجد قيمة كل من a,b ؟

15- نقطة التوازن هي النقطة التي يكون عندها العرض يساوي الطلب. فإذا كانت

دالة الطلب هي : $Q = 3P - 4$

دالة العرض هي: $Q = P^2 - 2P$

فجد قيمة P التي تحقق نقطة التوازن.

- جد مجموعة الحل للمتباينات في الاسئلة (16-20)

16- $x + 5 \leq 2x - 9$

17- $x^2 - 2x - 3 \leq 0$

18- $2x^3 - 7x^2 + 5x > 0$

19- $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{4x - 2} \geq 0$

20- $\dfrac{7}{2} < \dfrac{x+3}{2} < 4$

21- أوجد تقاطع مجموعتي الحل لكل من المتباينتين

a) $1 < 2x - 3 < 3 \quad , \quad 19 < 3x + 4 < 55$

b) $x^2 - 7x + 10 \leq 0 \quad , \quad 2 < 2x - 4 \leq 8$

22- أوجد المعادلة التربيعية التي جذراها هما (3 ، 2-) .

23- اذا كانت دالتي العرض والطلب هما :

دالة الطلب $P = -2Q_D + 50$

$$P = \frac{1}{2} Q_S + 25$$ دالة العرض

حيث :

السعر = P

كمية الطلب = Q_D

كمية العرض = Q_S

جد السعر والكمية عند نقطة التوازن .

الوحدة الثالثة

المتتاليات

Sequences

الوحدة الثالثة

المتتاليات

Sequences

المتتالية:

هي عبارة عن اقتران معرف من مجموعة الاعداد الطبيعية **N** إلى مجموعة الاعداد الحقيقيـة **R** وتكتب على الصورة

$$\{an\}_{n=1}^{\infty} = a_1 , a_2 , a_3 , ... a_n, ...$$

وتسمى العناصر $a_1, a_2 , ... a_n$ حدود المتتالية بينما يسمى الحد (a_n) الحد العام للمتتالية .

وتكتب المتتالية بدلالة حدها a_n .

مثال :

اكتب الحدود الاربعة الأولى لكل من المتتالية

1- $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}$

2- $\{ 3n - n^3 \}$

3- $\{ 2n + 4 \}$

4- $\{ 2^n \}$

الحل:

الحدود الاربعة الأولى هي a_1, a_2 , a_3, a_4

1- $a_1 = \frac{1}{2} , a_2 = 2 , a_3 = \frac{9}{2} , a_4 = 8$

2- $a_1 = 2 , a_2 = -2 , a_3 = -18 , a_4 = -52$

3- $a_1 = 6 , a_2 = 8 , a_3 = 10 , a_4 = 12$

4- $a_1 = 2 , a_2 = 4, a_3 = 8 , a_4 = 16$

مثال:

أوجد الحد الخامس والحد الثامن للمتتالية

$$\left\{\frac{n^2+1}{3n-2}\right\}$$

الحل:

$a_5 = \dfrac{25+1}{15-2} = \dfrac{26}{13} = 2$ الحد الخامس

$a_8 = \dfrac{64+1}{24-2} = \dfrac{65}{22}$ الحد الثامن

المتتالية الحسابية :

المتتالية الحسابية هي المتتالية التي يكون الفرق بين أي حدين متتاليين فيها مقداراً ثابتاً يسمى أساس المتتالية ويرمز له بالرمز d

اي اذا كانت $\{an\} = a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ متتالية حسابية فإن :

$a_2 = a_1 + d \Rightarrow d = a_2 - a_1$

$a_3 = a_2 + d \Rightarrow d = a_3 - a_2$

$a_4 = a_3 + d \Rightarrow d = a_4 - a_3$

:

$an = a_{n-1} + d \Rightarrow d = a_n - a_{n-1}$

مثال:

اي المتتاليات التالية حسابية واذا كانت فما هو اساسها

1- 2 , 4 , 8 , 16 , ……
2- 1 , 4 , 7 , 10 , ……
3- 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , …..
4- 5 , 3 , 1 , -1 , …..
5- 6 , 6 , 6 , 6 , 6 , ….

6- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

الحل:

1- $4 - 2 = 2$

$8 - 4 = 4$

∴ ليست حسابية

2- $4 - 1 = 3$

$7 - 4 = 3$

$10 - 7 = 3$

∴ حسابية أساسها (3)

3- $4 - 1 = 3$

$9 - 4 = 5$

∴ ليست حسابية

4- $3 - 5 = -2$

$1 - 3 = -2$

$-1 - 1 = -2$

∴ متتالية حسابية اساسها (-2)

5- $6 - 6 = 0$

$6 - 6 = 0$

$6 - 6 = 0$

∴ متتالية حسابية اساسها (0)

6- $\frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6}$

∴ ليست حسابية

الحد العام للمتتالية الحسابية :

اذا كانت $\{a_n\}$ متتالية حسابية حدها الأول a_1 واساسها d فإن

$a_2 = a_1 + d$

$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$

$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$

$a_5 = a_1 + 4d$

:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$\therefore$ الحد العام للمتتالية الحسابية هو

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)\, d}$$

مثال:

أوجد الحد العام للمتتالية الحسابية التـي حـدها الأول (2) وأساسـها (5) ثـم أوجـد الحـد الخـامس عشرـ للمتتالية

الحل:

$a_1 = 2$

$d = 5$

$\therefore$ يكون الحد العام هو :

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$= 2 + (n-1)(5)$

$\therefore\ a_n = 5n - 3$

الحد الخامس عشر

$a_{15} = 5(15) - 3$

$= 75 - 3$

$\therefore\ a_{15} = 72$

مثال:

جد الحد العام لكل من المتتاليات الحسابية التالية :

1- $3 , 6 , 9 , 12 , \ldots\ldots$

2- $10 , 8 , 6 , 4 , \ldots\ldots.$

3- $1, \frac{3}{2} , 2 , \frac{5}{2} , 3 , \ldots\ldots$

الحل :

نجد في البداية الحد الأول والأساسي للمتتالية ثم نعوض في قانون الحد العام.

1- $a_1 = 3 \quad , \quad d = 3$

$\therefore a_n = a1 + (n - 1) d$

$a_n = 3 + (n - 1) (3)$

$\Rightarrow a_n = 3 + 3n - 3$

$= 3n$

2- $a_1 = 10 \quad , \quad d = -2$

$a_n = 10 + (n - 1) (-2)$

$= 10 - 2n + 2$

$\Rightarrow a_n = 12 - 2n$

3- $a_1 = 1 \quad , \quad d = \frac{1}{2}$

$a_n = 1 + (n-1) \frac{1}{2}$

$= 1 + \frac{1}{2} n - \frac{1}{2}$

$\Rightarrow an = \frac{n+1}{2}$

مثال:

ادخل ثلاثة أوساط حسابية بين العددين 3 ، 19

الحل:

تكون الاوساط الحسابية مع العددين متتالية حسابية على الصورة a_1, a_2, a_3, a_4, a_5

وتكون الاوساط هي a_2, a_3, a_4

حيث $a_1 = 3, a_5 = 19$

$a_5 = a_1 + (4)\ d$

$19 = 3 + 4d \Rightarrow d = \frac{19-3}{4} = \frac{16}{4} = 4$

$\therefore\ a_2 = a_1 + d = 3 + 4 = 7$

$a_3 = a_2 + d = 7 + 4 = 11$

$a_4 = a_3 + d = 11 + 4 = 15$

مثال:

متتالية حسابية حدها الرابع = 13 وحدها العاشر = 25 جد حدها العام.

الحل:

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$a_4 = a_1 + 3d = 13$ .... (1)

$a_{10} = a_1 + 9d = 25$ .... (2)

$a_1 = 13 - 3d$ من المعادلة (1)

بالتعويض في المعادلة (2)

$(13 - 3d) + 9d = 25$

$6d = 25 - 13 = 12$

$d = 2$

$a_1 = 13 - 3(2) = 13 - 6 = 7$

$\therefore\ a_n = a_1 + (n-1)\, d$

$= 7 + (n-1)(2)$

$\Rightarrow a_n = 2n + 5$

مجموع أول n حد من الحدود للمتتالية الحسابية :

أول ن من الحدود هو :

$a_1 , a_2 , \ldots , a_n$

ومجموعها هو:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$\Rightarrow S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + a_1 + (n-1)d$

$S_n = na_1 + d + 2d + 3d + \ldots + (n-1)\, d$

$= na_1 + d\,(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))$

$= na_1 + d\, \frac{n(n-1)}{2}$

$\Rightarrow \mathbf{S_n = \frac{n}{2}\,(2a_1 + (n-1)\, d)}$

$\Rightarrow S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + (a_1 + (n-1)d))$

$\Rightarrow \mathbf{S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)}$

مثال:

متتالية حسابية حدها الأول = 3- , واساسها(4) جد مجموع أول (20) حد منها.

الحل :

$a_1 = -3 , d = 4$

$S_n = \frac{n}{2}\,(2a_1 + (n-1)\, d)$

$$S_{20} = \frac{20}{2}\left((2)(-3) + (19)(4) \right)$$

$$= 10 (-6 + 76)$$

$$= (10)(70) = 700$$

مثال:

متتالية حسابية عدد حدودها (16) حدها الأول (3) وحدها الأخير (39) احسب مجموعها.

الحل:

$a_1 = 3 , a_{16} = 39 , n = 16$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_{16} = \frac{16}{2}(3 + 39)$$

$$= (8)(42)$$

$$\therefore S_{16} = 336$$

مثال: جد المجموع التالي:

$$\sum_{n=1}^{12}(5n - 1)$$

الحل:

هذا المجموع يمثل مجموع متتالية حسابية عدد حدودها (12) حدها الأول (4) واساسها (5)

$$\therefore S_{12} = \frac{12}{2}\left(2(4) + 11(5) \right)$$

$$S_{12} = 378$$

مثال:

متتالية حسابية حدها الأول (6) وحدها الأخير (66) ومجموع حدودها (252) جد عدد حدودها.

الحل:

نطبق القانون

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$\Rightarrow \frac{n}{2}(6 + 66) = 252$$

$$\frac{n}{2}(72) = 252$$

$$n(36) = 252$$

$$n = 7$$

المتتالية الهندسية :

المتتالية الهندسية المتتالية التي تكون فيها النسبة بين أي حدين متتاليين ثابتة تسمى اساس المتتالية ويرمز لها بالرمز r .

أي: اذا كانت $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n$

متتالية هندسية فإن :

$$a_2 = a_1 d \Rightarrow d = \frac{a_2}{a_1}$$

$$a_3 = a_2 d \Rightarrow d = \frac{a_3}{a_2}$$

$$a_4 = a_3 d \Rightarrow d = \frac{a_4}{a_3}$$

:

$$a_n = a_{n-1} d \quad d = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

مثال:

اي من المتتاليات التالية هندسية واذا كانت ما هو أساسها.

1- 1, 4, 9, 16, 25 , ……

2- 2, 4, 8, 16, 32, …….

3- 2, 4, 6, 8, 10, …….

4- $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{8}$, ……

5- 1 , -1, 1, -1, 1, -1, ……

الحل:

1- $\frac{4}{1} = 4$

$\frac{9}{4} = 2.25$

$\therefore$ ليست هندسية

2- $\frac{4}{2} = 2$

$\frac{8}{4} = 2$

$\frac{16}{8} = 2$

$\therefore$ متتالية هندسية اساسها (2)

3- $\frac{4}{2} = 2$

$\frac{6}{4} = 1.5$

$\therefore$ ليست هندسية

4- $\frac{1}{3} \div 1 = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{27} \div \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

∴ هندسية اساسها $\left(\frac{1}{3}\right)$

5- $\frac{-1}{1} = -1$

$\frac{1}{-1} = -1$

$\frac{-1}{1} = 1$

∴ هندسية أساسها (1-)

الحد العام للمتتالية الهندسية :

اذا كانت $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$

متتالية هندسية حدها الأول (a_1) واساسها r فإن

$a_2 = a_1 r$

$a_3 = a_2 r = a_1 r^2$

$a_4 = a_3 r = a_1 r^3$

$a_5 = a_1 r^4$

:

الحد العام للمتتالية

$\mathbf{a_n = a_1 r^{n-1}}$

مثال:

متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها (2) جد حدها العام.

الحل:

$a_n = 1 , r = 2$

$a_n = a_1 r^n$

$= (1)\ (2)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 2^{n-1}$

مثال:

جد الحد العام لكل من المتتاليات الهندسية التالية:

1- $4, 16, 64, 256 , \ldots..$

2- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} , \ldots.$

3- $-1, 1 , -1 , 1, -1, \ldots..$

الحل:

1- $a_1 = 4, r = 4$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$= (4)\ (4)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = 4^n$

2- $a_1 = 1\ ,\ r = \frac{1}{2}$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$= (1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$

3- $a_1 = -1$, $r = -1$

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$= (-1)(-1)^{n-1}$

$\therefore a_n = (-1)^n$

مثال:

متتالية هندسية حدها الرابع (5) ، وحدها السابع $\left(\frac{1}{25}\right)$ جد حدها الأول والاساس

الحل:

الحد العام للمتتالية الهندسية هو :

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_4 = a_1 r^3 = 5$

$a_7 = a_1 r^6 = \frac{1}{25}$

بالقسمة $\frac{a_7}{a_4}$ $\Leftarrow$ $\frac{a_1 r^6}{a_1 r^3} = \frac{\frac{1}{25}}{5}$

$\Rightarrow r^3 = \frac{1}{125} = \frac{1}{5^3}$

$\Rightarrow r^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^3$

$\therefore r = \frac{1}{5}$

نعوض في معادلة a_4 لايجاد a_1

$a_1 r^3 = 5$

$\Rightarrow a_1 \left(\frac{1}{5}\right)^3 = 5$

$$\Rightarrow a_1 \frac{1}{125} = 5$$

$$\Rightarrow a_1 = 625$$

مثال :

ادخل ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2 ، 1250

الحل:

$a_1 = 2 \quad , \quad a_5 = 250$

والمطلوب ايجاد a2 , a3 , a4

$a_5 = a_1 r^4$

$1250 = (2)\ r^4$

$$\Rightarrow r^4 = \frac{1250}{2} = 625$$

$\Rightarrow r^4 = 5^4$

$\therefore r = 5$

$\therefore a_2 = a_1 r = (2)\ (5) = 10$

$a_3 = a_2 r = (10)\ (5) = 50$

$a_4 = a_3 r = (50)\ (5) = 250$

مثال: متتالية هندسية حدها الأول (2) وحدها الأخير (486) واساسها (3) جد عدد حدودها.

الحل :

$a_n = a_1 r^{n-1}$

$486 = (2)\ (3)^{n-1}$

$$(3)^{n-1} = \frac{486}{2} = 243$$

$(3)^{n-1} = (3)^5$

$\Rightarrow n-1 = 5$

$\therefore n = 6$

مجموع أول (n) حد من حدود المتتالية الهندسية :

مجموع أول n حد من المتتالية الهندسية التي حدها الأول a_1 واساسها r هو :

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

$\Rightarrow S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots + a_1r^{n-1}$ ……………….. (1)

بالضرب في r تصبح

$r S_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \ldots.. + a_1r^n$ ……………….. (2)

بالطرح (1) من (2) تصبح :

$r\ S_n - S_n = (a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \ldots + a_1r^n)$

$- (a_1 + a_1r + a_1r^2 + \ldots\ldots + a_1r^{n-1})$

نختصر الحدود المتشابهة تصبح

$r\ S_n - S_n = a_1r^n - a_1$

$\Rightarrow S_n\ (r-1) = a_1\ (r^n - 1)$

∴ مجموع أول n حد هو

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

مثال:

متتالية هندسية حدها الأول (8) واساسها (2) احسب مجموع أول خمسة حدود منها.

الحل:

$a_1 = 8 \quad , \quad r = 2$

$$S_5 = \frac{a_1(r^5 - 1)}{r - 1}$$

$$= \frac{(8)(2^5 - 1)}{2 - 1} = 8\ (32-1) = 248$$

مثال:

جد المجموع التالي:

$$\sum_{n=1}^{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

الحل:

المتتالية متتالية هندسية حدها الأول (1) واساسها $\left(\frac{1}{4}\right)$ والمطلوب ايجاد مجموع أول سبعة حدود

$$S_n = \frac{a_1\left(r^n - 1\right)}{r - 1}$$

$$S_7 = \frac{1\left(\left(\frac{1}{4}\right)^7 - 1\right)}{\frac{1}{4} - 1}$$

$$= \left(\frac{1}{4^7} - 7\right)\left(\frac{4}{-3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{16384} - 1\right)\left(\frac{4}{-3}\right)$$

$$= \frac{-16383}{16384} \times \frac{4}{-3}$$

$$S^7 = \frac{5461}{4096}$$

مثال:

متتالية هندسية حدها الأول (8) ومجموع أول أربعة حدود منها يساوي (320) جد اساسها.

الحل:

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

$$S_4 = \frac{8(r^4 - 1)}{r-1} = 320$$

$$\Rightarrow \frac{r^4 - 1}{r-1} = 40 \Rightarrow \frac{(r-1)(r+1)(r^2+1)}{r-1} = 40$$

$$\Rightarrow r^3 + r^2 + r - 39 = 0 \Rightarrow (r-3)\,(r^2 + 4r + 13) = 0$$

$$\Rightarrow r = 3$$

تطبيقات المتتاليات في حساب الفائدة البسيطة والفائدة المركبة :

يكون جملة المبلغ على حساب الفائدة البسيطة في نهاية المدة على شكل متتالية حسابية وتحسب بالقانون

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\, d}$$

حيث

المبلغ في بداية المدة = a_1

عدد السنوات + 1 = n

الفائدة السنوية على المبلغ = d

نسبة الفائدة × $d = a_1$

مثال:

أودع شخص مبلغ (10000) دينار لمدة (8) سنوات بفائدة بسيطة 7.5% سنوياً احسب جملة المبلغ في نهاية المدة.

الحل:

$a_1 = 10000$

$n = 8 + 1 = 9$

$$d = \frac{7.5}{100} \times 10000 = 750$$

المبلغ في نهاية السنة الثانية = a_8

$a_8 = 10000 + (9-1)\ (750)$

$= 10000 + 6000$

$= 16000$ J.D

أما الفائدة المركبة فتحسب على أساس المتتالية الهندسية حيث تحسب بالقانون

$$\mathbf{a_n = a_1 r^n}$$

حيث جملة المبلغ في نهاية المدة = a_n

المبلغ في بداية المدة = a_1

نسبة الفائدة + 1 = r

مثال:

ادخر شخص مبلغ (8000) دينار بفائدة مركبة 9% لمدة خمس سنوات. فما هي جملة المبلغ في نهاية المدة.

الحل:

$a_1 = 8000$

$r = 1 + 0.09 = 1.09$

$n = 5$

$a_5 = 8000\ (1.09)^5$

$= 12308.99$ J.D

تمــارين

- في المتتاليات (1-4) حدد أيها حسابية وايها هندسية واذا كانت ما هو اساسها

1- 7 , 13 , 19 , 25 , …

2- $\left\{\frac{n-3}{2}\right\}$

3- $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}$, ….

4- Lnx , Lnx^2 , Lnx^4 , Lnx^8 , ….

- جد الحد العام للمتتاليات الحسابية والهندسية في الاسئلة (5-9)

5- 3, 11, 19, 27, 35 , ….

6- $\frac{1}{2}, 4, \frac{15}{2}, 11, \frac{29}{2}$, ….

7- x-1 , x , x+1 , …..

8- 1 , x^3 , x^6 , x^9 , ….

9- 7, 49, 343, 2401 , …

10- متتالية حسابية حدها الأول (10-) واساسها (3) جد حدها العام ومجموع أول (20) حد منها.

11- متتالية هندسية حدها الأول (4) واساسها (2.5) جد حدها العام ومجموع أول ستة حدود منها.

12- ادخل خمسة أوساط حسابية بين العددين (8) ، (32)

13- أدخل أربعة أوساط هندسية بين العددين 1 ، 1024 .

14- متتالية حسابية الحد الخامس فيها 9 والحد العاشر 19 . جد مجموع أول خمسين حد منها .

15- جد مجموع الاعداد الزوجية الطبيعية والتي اقل من (100).

16- متتالية حسابية مجموع الحدود الستة الأولى منها (42-) ومجموع الحـدود السـتة الأخـير منهـا (30) جد حدها العاشر اذا كان عدد حدودها (12) .

17- طفل يدخر كل يوم (15) قرشاً . فإذا فتح حصالته بعد تسعة أيام ووجـد فيهـا دينـاران ونصـف فكـم كان في حصالته قبل أن يبدأ الادخار.

18- جد مجموع أول ثمانية حدود من المتتالية الحسابية.

$Ln(x) , Ln(xy) , Ln(xy^2) , Ln(xy^3) , ...$

اذا كانت $x = e^2 , y = \frac{1}{e}$

19- متتالية هندسية الحد الثالث فيها (48) والحد الخامس (768) جد مجموع أول عشرة حدود منها.

20- في المتتالية الهندسية $1, -1, 1, -1, 1, ...$

جد مجموع حدودها اذا كان

1- عدد حدودها زوجي.

2- عدد حدودها فردي.

21- جد قيمة x في المتتالية الهندسية

$4x , 8x^2 , 16x^3 , ...$

اذا كان الحد السادس فيها يساوي (8192)

- جد المجاميع في الاسئلة (22-25)

22- $\sum_{n=1}^{30}(3n-1)$

23- $\sum_{n=1}^{12}3^n$

24- $\sum_{n=1}^{50}(4-2n)$

25- $\sum_{n=1}^{7}\frac{1}{2^{n-1}}$

26- جد الحد الاول للمتتالية الهندسية التي اساسها (7) ومجموع أول خمسة حدود منها = 8403.

27- استثمر شخص مبلغ (3000) دينار لمدة (15) سنة بفائدة بسيطة مقدار (12%) احسب جملة المبلغ في نهاية المدة.

28- استثمر شخص مبلغ (25000) دينار بفائدة مركبة مقدارها (8%) احسب جملة المبلغ بعد عشر سنوات.

29- استثمر شخص مبلغ (8000) دينار لمدة خمس سنوات بفائدة بسيطة واصبح المبلغ في نهاية المدة (11600) دينار فما هو سعر الفائدة.

30- استثمر شخص مبلغ (6500) بفائدة مركبة (7%) احسب مدة استثمار المبلغ اذا حصل في نهاية المدة على مبلغ (9750) دينار.

الوحدة الرابعة

المصفوفات والمحددات

Matrices and Determinants

الوحدة الرابعة

المصفوفات والمحددات

Matrices and Determinant's

يحتل موضوع المصفوفات مكانة مهمة في الرياضيات والعلوم التطبيقية الاخرى ومن ضمنها العلوم الادارية والمالية. وتفيد المصفوفات في أمور كثيرة منها الترتيب وحل أنظمة المعادلات.

المصفوفة:

هي عدد من العناصر موضوعة على شكل صفوف واعمدة وتسمى بأحد الحروف الهجائية الكبيرة A, B, C, ... , ومن الأمثلة على المصفوفات

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 & 8 \\ 7 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة :

رتبة المصفوفة تساوي عدد الصفوف × عدد الاعمدة .

مثال:

رتبة المصفوفة A هي 4 × 3 وتكتب على الصورة A_{3x4}

رتبة المصفوفة B هي 2 × 4 وتكتب على الصورة B_{4x2}

رتبة العنصر:

رتبة العنصر a هي موقعه في الصف والعمود

أي العنصر في الصف i والعمود j = a_{ij}

مثال:

في المصفوفة A السابقة أوجد العناصر a_{21}, a_{32}, a_{24}

الحل:

العنصر a_{21} : العنصر في الصف الثاني العمود الأول $\Leftarrow$ 7 : a_{21}

العنصر a_{32} : العنصر في الصف الثالث العمود الثاني $\Leftarrow$ 2- : a_{32}

العنصر a_{24} : العنصر في الصف الثاني العمود الرابع $\Leftarrow$ 1 : a_{24}

أنواع المصفوفات:

1- المصفوفة الصفرية : Zero Matrix

المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفار

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{2*3}$$

مصفوفة صفرية رتبتها 3 ×2

2- المصفوفة المربعة : Squair matrix

المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف = عدد الاعمدة .

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

المصفوفة A مصفوفة مربعة من الرتبة 2 × 2 (أي من الرتبة الثانية)

المصفوفة B مصفوفة مربعة من الرتبة 3 × 3 (أي من الرتبة الثالثة)

-3 المصفوفة القطرية : Diagonal matrix

المصفوفة المربعة التي يكون فيها جميع العناصر غير القطر الرئيسي أصفار

أي: A مصفوفة قطرية. اذا كانت

$$A_{nxn} = \begin{cases} a_{ij} = 0 & i \neq j \\ a_{ij} \neq 0 & i = j \end{cases}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3x3}$$

مصفوفة قطرية من الرتبة الثالثة

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2x2}$$

مصفوفة قطرية من الرتبة الثانية

-4 المصفوفة المحايدة: Identity matrix

المصفوفة القطرية التي يكون عناصر القطر الرئيسي فيها (1) ويرمز لها بالرمز I_n حيث n تمثل عدد صفوف المصفوفة (رتبتها)

$$I_n = \begin{cases} a_{ij} = 0 & i \neq j \\ a_{ij} = 1 & i = j \end{cases}$$

مثال :

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5- المصفوفة المثلثية: **Triangular matrix**

وتقسم إلى قسمين:

أ- المصفوفة المثلثية العليا:

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر تحت القطر الرئيسي أصفار . أي

$$A_{nxn} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0 & i \leq j \\ a_{ij} = 0 & i > j \end{cases}$$

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4x4}$$

مصفوفة مثلثية عليا من الرتبة الرابعة

ب- المصفوفة المثلثية السفلي :

المصفوفة التي يكون فيها جميع العناصر فوق القطر الرئيسي اصفار. أي

$$A_{nxn} = \begin{cases} a_{ij} \neq 0 & i \geq j \\ a_{ij} = 0 & i < j \end{cases}$$

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & -2 \end{bmatrix}_{3*3}$$

مصفوفة مثلثية من الرتبة الثالثة

منقول المصفوفة: Transpose of matrix

وهي تبديل الصفوف بالاعمدة والاعمدة بالصفوف ويرمز لها بالرمز A^T

$$A_{ij} \rightarrow A^T_{ji}$$

مثال: جد منقول كل من المصفوفات التالية:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 6 \end{bmatrix}_{2*3}$$

$$2)\ B = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}_{3*3}$$

الحل:

$$1)\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3*2}$$

$$2)\ B^T = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المتماثلة : Symatric matrix

تكون المصفوفة متماثلة اذا كانت

$$A = A^T$$

مثال:

اي من المصفوفات التالية متماثلة :

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2)\ B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$1)\ A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \neq A$$

$\therefore$ A ليست متماثلة .

$$2)\ B^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 6 \\ 1 & 6 & 8 \end{bmatrix} = B$$

$\therefore$ B متماثلة .

العمليات على المصفوفات : Operation on matrices

1- الجمع والطرح:

عند جمع أو طرح مصفوفتين يجب أن تكونا من نفس الرتبة ونجمع أو نطرح العناصر المتناظرة.

مثال:

جد ناتج ما يلي:

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2x3} + B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$2)\ A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 7 & 3 & 8 \end{bmatrix}_{3x3} - B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ -1 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}_{3x3}$$

الحل:

$$1)\ A + B = \begin{bmatrix} 2 & 11 & 11 \\ 8 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{2z3}$$

$$2)\ A - B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{3x3}$$

2- الضرب بعدد ثابت:

عند ضرب مصفوفة بعدد ثابت فإننا نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بالعدد

مثال:

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

فجد ما يلي:

1) 3A

2) 2B

3) 3A – 2B

الحل:

$$1)\ 3A = \begin{bmatrix} 12 & 27 \\ 18 & 9 \end{bmatrix}$$

$$2)\ 2B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$3)\ 3A - 2B = \begin{bmatrix} 10 & 25 \\ 14 & -1 \end{bmatrix}$$

3- ضرب المصفوفات:

عند ضرب مصفوفتين يجب أن تكون عدد أعمدة الاولى يساوي عدد صفوف الثانية وعند الضرب نضرب الصف i في المصفوفة الاولى بالعمود j في المصفوفة الثانية لينتج العنصر aij في المصفوفة الناتجة.

مثال:

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}_{4*3} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3*2}$$

احسب

1) AB

2) BA

الحل:

$$1)\ AB = \begin{bmatrix} (1)(2)+(4)(3)+(-1)(-1) & (1)(0)+(4)(1)+(-1)(4) \\ (5)(2)+(6)(3)+(2)(-1) & (5)(0)+(6)(1)+(2)(4) \\ (2)(2)+(1)(3)+(7)(-1) & (2)(0)+(1)(1)+(7)(4) \\ (3)(2)+(0)(3)+(4)(-1) & (3)(0)+(0)(1)+(4)(4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+12+1 & 0+4-4 \\ 10+18-2 & 0+6+8 \\ 4+3-7 & 0+1+28 \\ 6+0-4 & 0+0+16 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 15 & 0 \\ 26 & 14 \\ 0 & 29 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}_{4x2}$$

4) BA لا تجوز عملية الضرب

ملاحظة :

1- اذا كانت A_{mn} وكانت B_{nk} فإن $(AB)_{mk}$

مثال:

اذا كانت A_{3x5} , B_{5x6} فجد رتبة AB .

الحل:

رتبة $(AB)_{3x6}$

2- نستنتج من المثال السابق أن

$$AB \neq BA$$

مثال:

اذا كانت $A= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ فجد A^2

الحل :

$$A^2 = A \,.\, A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4+24 & 8+20 \\ 12+30 & 24+25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & 28 \\ 42 & 49 \end{bmatrix}$$

مثال:

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

وكانت

$C = AB$, $D = BA$

فجد ما يلي:

C_{12} , C_{33} , D_{21} , D_{13}

الحل:

1) حاصل ضرب الصف الأول من المصفوفة A بالعمود الثاني من المصفوفة C_{12}=B

$$\therefore C_{12} = 3 \times 1 + 4 \times 2 + 5 \times 5$$
$$= 3 + 8 + 25 = 36$$

2) $C_{33} = 6 \times -1 + 4 \times 6 + 7 \times 0$
$$= -6 + 24 + 0 = 18$$

3) $D_{21} = 4 \times 3 + 2 \times 2 + 6 \times 6$
$$= 12 + 4 + 36 = 52$$

4) $D_{13} = 1 \times 5 + 1 \times 0 + -1 \times 7$
$$= 5 + 0 - 7 = -2$$

عمليات الصف البسيط : Row operation

هي مجموعة من العمليات تقام على صفوف المصفوفة وهذه العمليات تتكون من ثلاثة عمليات فقط هي:

1- ضرب صف بعدد ثابت.

2- ضرب صف بعدد ثابت وجمعه الى صف آخر.

3- تبديل صف مكان صف.

مثال:

في المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \\ 7 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

نفذ العمليات التالية على المصفوفة على الترتيب.

1- أضرب الصف الثاني بالعدد 2

2- اضرب الصف الاول بالعدد (1-) واجمعه الى الصف الثالث

3- بدل الصف الثاني مع الصف الثالث.

الحل:

$$1)\ \xrightarrow{2r_2}\begin{bmatrix}4 & 1 & 5\\ 12 & 6 & 4\\ 7 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$2)\ \xrightarrow{-1r_1+r_3}\begin{bmatrix}4 & 1 & 5\\ 12 & 6 & 4\\ 3 & -2 & -5\end{bmatrix}$$

$$3)\ \xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}4 & 1 & 5\\ 3 & -2 & -5\\ 12 & 6 & 4\end{bmatrix}$$

ايجاد معكوس المصفوفة باستخدام عمليات الصف البسيط:

نرمز الى معكوس المصفوفة بالرمز A^{-1}

ونجد معكوس المصفوفة عن طريق عمليات الصف البسيط كالاتي

$$[\,A\mid I_n\,]\xrightarrow{\text{row operation}}[\,I_n\mid A^{-1}\,]$$

مثال:

جد معكوس المصفوفة التالية باستخدام عمليات الصف البسيط

$$A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}$$

الحل:

لايجاد معكوس المصفوفة نستخدم العلاقة السابقة بحيث نضع المصفوفة ومعها المصفوفة المحايدة I_2 وباستخدام عمليات الصف البسيط تتحول A إلى I_2 وتتحول I_2 إلى A^{-1} .

$$\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 4 & 1 & 0\\ 6 & 5 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{1}{3}r_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 6 & 5 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-6r_1+r_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -3 & -2 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{4}{3}r_2+r_1}\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -\frac{5}{9} & \frac{4}{9}\\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\end{array}\right]$$

$$\therefore\ A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{-5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}$$

للتحقق من الحل: $AA^{-1}=I$

$$AA^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-5}{9} & \frac{4}{9}\\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-15}{9}+\frac{8}{3} & \frac{12}{9}-\frac{4}{3}\\ \frac{-30}{9}+\frac{10}{3} & \frac{24}{9}-\frac{-5}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-15}{9}+\frac{24}{9} & \frac{12}{9}-\frac{12}{9}\\ \frac{-30}{9}+\frac{30}{9} & \frac{24}{9}-\frac{15}{9}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

مثال:

جد معكوس المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\\ -2 & 3 & 7\end{bmatrix}$$

باستخدام عمليات الصف البسيط

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[2r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 17 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{2}r_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 9 & 17 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-9r_2+r_3]{-3r_2+r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -7 & \frac{9}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-1r_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & \frac{-9}{2} & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[-2r_3+r_2]{r_3+r_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -13 & \frac{17}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & \frac{-9}{2} & -1 \end{array}\right]$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -1 \\ -13 & \frac{17}{2} & 2 \\ 7 & \frac{-9}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

تأكد من الحل ؟

ملاحظة: كما رأينا في المثال السابق فإننا يمكن أن نقوم بأكثر من عملية صف بسيط في نفس الوقت .

حل أنظمة المعادلات الخطية باستخدام عمليات الصف البسيط:

اذا كان لدينا النظام التالي من المعادلات الخطية

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots.. + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots.. + a_{2n}x_n = b_2$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots.. + a_{nn}x_n = b_n$

نعرف المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

حيث تسمى A مصفوفة المعاملات X مصفوفة المتغيرات، B مصفوفة الثوابت وبالتالي يمكن التعبير عن نظام المعادلات باستخدام المصفوفات كالآتي:

$AX= B$

ولحل هذا النظام باستخدام عمليات الصف البسيط نستخدم الخطوات التالية:

1- نضع المصفوفة [A | B]
2- نطبق عليها عمليات الصف البسيط.
3- ينتج [I | C] حيث C تمثل مصفوفة الحل وتكون X = C .

أي :

$$[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{B}\,] \xrightarrow{\text{row operation}} [\,\mathbf{I} \mid \mathbf{C}\,]$$

مثال :

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام عمليات الصف البسيط

$3x + 2y = 7$

$4x - y = 2$

الحل:

مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة المتغيرات

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$[\,A \mid B\,] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 7 \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 4 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-4r_1+r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{-11}{3} & \frac{-22}{3} \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-3}{11}r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{-2}{3}r_2+r_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

∴ يكون الحل هو

$x = 1 ,\ y = 2$

مثال:

جد حل النظام التالي من المعادلات

$$x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5$$

$$x_2 + 6x_3 + x_4 = 7$$

$$2x_1 + \quad + x_3 - 2x_4 = 3$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 6$$

الحل :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[-r_1 + r_4]{-2r_1 + r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\substack{2r_2 + r_3 \\ -r_2 + r_4}]{-r_2 + r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{9}r_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -6 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[7r_3 + r_4]{\substack{-4r_3 + r_1 \\ -6r_3 + r_2}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-10}{9} & \frac{10}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{14}{9} & \frac{-5}{9} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{9}{14}r_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{-10}{9} & \frac{10}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{14} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{-2}{9}r_4+r_3]{\frac{10}{9}r_4+r_1 \quad \frac{1}{3}r_4+r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{7} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{149}{42} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-5}{14} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{149}{42} \\ \frac{6}{7} \\ \frac{-5}{14} \end{bmatrix}$$

ويكون الحل النهائي هو:

$$x_1 = \frac{5}{7}, \; x_2 = \frac{149}{42}, \; x_3 = \frac{6}{7}, \; x_4 = \frac{-5}{14}$$

مثال:

جد حل النظام التالي من المعادلات

$2x_1 + x_2 - x_3 = 4$

$x_1 + 3x_2 = 5$

$4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 10$

الحل:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & 10 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -2 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-4r_1+r_3]{-2r_1+r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \\ 0 & -10 & -2 & -10 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{5}r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & -10 & -2 & -10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[10r_2 + r_3]{-3r_2 + r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{-3}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

نلاحظ هنا أنه لا يمكن الحصول على المصفوفة المحايدة من المصفوفة A

∴ لا يوجد حل لهذا النظام .

المحددات : Determinants

محددة المصفوفة هي القيمة الرقمية للمصفوفة ويرمز لها باحد الرموز التالية:

Det A , ΔA , |A|

1-محددة المصفوفة من الرتبة الثانية 2 × 2 :

المصفوفة من الرتبة 2×2 تكون على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وتكون محددتها هي:

$$\Delta A = ad - bc$$

مثال:

جد محددة المصفوفات التالية

1- $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2- $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

3- $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

الحل:

1- $\Delta A = (5)(4) - (2)(3)$

$= 20 - 6$

$= 14$

2- $\det A = (1)(2) - (3)(5)$

$= 2 - 15$

$= -13$

3- $\det A = (2)(9) - (6)(3)$

$= 18 - 18$

$= 0$

ملاحظة : اذا كانت $\Delta A = 0$

فإن A تسمى مصفوفة منفردة Singular matrix

2- محددة المصفوفة من الرتبة الثالثة

المصفوفة من الرتبة الثالثة تكون على الصورة

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولايجاد محددة المصفوفة A نستخدم واحدة من الطريقتين:

أ- طريقة الاسهم (سايروس)

في هذه الطريقة نكرر العمود الاول والثاني، ثم نجد حاصل ضرب الاقطار الرئيسية ونطرح منها حاصل ضرب الاقطار المرافق كالاتي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$\det A = (a_n\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}) - (a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{13}\, a_{22}\, a_{31})$

مثال: جد محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$A = \left[\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ -1 & 7 & 3 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ -1 & 7 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= ((1)(4)(3) + (2)(6)(-1) + (3)(5)(7)\ ) - \\ &\quad (\ (2)(5)(3) + (1)(6)(7) + (3)(4)(-1)\ ) \\ &= (12 - 12 + 105) - (30 + 42 - 12) \\ &= 105 - 60 \\ &= 45 \end{aligned}$$

مثال: احسب محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$A = \left[\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 4 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 3 & 1 \\ 7 & 8 \\ 6 & 2 \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \det A &= (96 + 54 + 28) - (28 + 54 + 96) \\ &= 178 - 178 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore$ A مصفوفة منفردة

2- طريقة المحددات الصغرى

نجد المحددة بالنسبة لأي صف أو عمود فإذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن محددة A بالنسبة للصف الأول هي :

$$\Delta A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

ثم نجد محددات المصفوفات الثنائية

ونستطيع ايجاد المحددة بالنسبة لأي صف أو أي عمود وتكون اشارات المصفوفة كالأتي:

$$A = \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix}$$

مثال :

جد محددة المصفوفة التالية بالنسبة للصف الأول

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$\Delta A = 3\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 3(10 - 21) + 1(0 - 12) + 1\ (0 - 12)$

$= -33 - 12 - 12 = -57$

مثال :

جد محددة المصفوفة التالية بالنسبة للعمود الثاني:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 5 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\Delta A = -6\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$$

$= -6\ (35 + 6) + 1\ (28 + 16) - 0$

$= -246 + 44 = -202$

خواص المحددات :

1- اذا كانت عناصر أحد الصفوف أو الاعمدة أصفار فإن محددة المصفوفة تساوي صفر.

مثال :

احسب محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

لان الصف الثاني أصفار فإن $\Delta A = 0$

2- اذا تساوت عناصر صفين أو عمودين في المصفوفة فإن محددتها تساوي صفر.

مثال:

احسب محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 5 \\ 9 & 1 & 9 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل:

لان عناصر العمود الأول والثالث متساوية فإن $\Delta A = 0$

3- اذا ضرب أحد الصفوف أو أحد الاعمدة بعدد ثابت فإن محددة المصفوفة تضرب بنفس العدد .

مثال:

اذا كانت محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Delta A = 5$

فجد محددة المصوفة

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

نلاحظ أن المصفوفة B هي المصفوفة A مضروب الصف الثالث فيها بالعدد (3)

$\therefore \Delta B = 3 \Delta A = (3)(5) = 15$

4-اذا كانت Anxn مصفوفة مربعة وكان K اي عدد حقيقي فان

$\det(KA) = K^n \det(A)$

مثال:

اذا كانت $\Delta(A_{2x2}) = 5$ فجد محددة (3A)

الحل:

$\Delta(3A) = 3^2(\Delta A) = (9)(5) = 45$

5-اذا بدلنا صف مكان صف أو عمود مكان عمود في المصفوفة فإن محددة المصفوفة تنعكس اشارتها.

مثال:

اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \Delta A = -2$$

فجد محددة

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل :

المصفوفة B هي ناتج تبديل الصف الأول بالصف الثاني في المصفوفة A

$\therefore \Delta B = -(-2) = 2$

6-اذا كان أحد الصفوف مضاعف لصف آخر أو أحد الاعمدة مضاعف للاخر فإن محددة المصفوفة = صفر .

مثال:

جد محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

الحل:

لأن الصف الثالث من مضاعفات الصف الثاني فإن $\Delta A = 0$

7- $\Delta(AB) = (\Delta A)(\Delta B)$

مثال:

اذا كانت A , B مصفوفتان من الرتبة 3×3 وكانت

$(\Delta A) = 2$ ، $(\Delta B) = 5$. فجد $\Delta(AB)$

الحل:

$$\Delta(AB) = (\Delta A)(\Delta B)$$
$$= (2)(5) = 10$$

8- $\Delta A = \Delta A^T$

مثال: اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

فجد $\Delta A , \Delta A^T$

الحل:

$$\Delta A = 10 - 6 = 4$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \Delta AT = 10 - 6 = 4$$

9- محددة المصفوفة القطرية = حاصل ضرب القطر

مثال:

جد محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$\Delta A = (2)(1)(-3)(-4) = 24$

10- محددة المصفوفة المحايدة = 1

اي $\det(I_n) = 1$

مثال:

جد محددة المصفوفة I_5

الحل:

$\Delta I_5 = 1$

11- محددة المصفوفة المثلثية = حاصل ضرب القطر

مثال:

جد محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل:

$\Delta A = (2)(3)(4) = 24$

مثال:

جد محددة المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\Delta A = (1)(1)(3)$$
$$= 3$$

معكوس المصفوفة : Inverse of matrix

اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 2×2 اي

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

فنجد معكوس المصفوفة بالخطوات التالية :

1- نجد محددة المصفوفة (det A)

2- يكون معكوس المصفوفة A^{-1} هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

مثال:

جد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\det(A) = 8 - 3 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} \\ \frac{-1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

مثال:

جد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\Delta A = 12 - 12 = 0$$

∴ لا يوجد معكوس للمصفوفة

ملاحظة 1 :

اذا كانت محددة المصفوفة = صفر فإن المصفوفة لا يوجد لها معكوس .

ملاحظة 2 :

معكوس المصفوفة المحايدة هو نفس المصفوفة

أي اذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ فإن $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1-اذا كانت A مصفوفة من الرتبة 3×3 بحيث $(detA \neq 0)$

اي

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فنجد معكوس المصفوفة A باستخدام المحددات كالاتي:

1- نجد محددة المصفوفة (detA)

2- نجد المحددة المرافقة لكل عنصر من عناصر المصفوفة ونضعها في مصفوفة ونرمز لها بالرمز 'A

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{12} & A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

حيث A_{11} هي المحددة المرافقة للعنصر a_{11} وتكون

$$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

3-نجد $adjA = (A')^T$

$$adj\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

4-يكون معكوس المصفوفة هو :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ adj\ A$$

مثال:

جد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

نجد في البداية محددة A

$$detA = 5\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 5(9-0) - 4(6+12) + 1(0-18)$$

$$= 45 - 72 - 18 = -45$$

ثم نجد المحددات المرافقة للعناصر:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 18$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -18$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 12$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -12$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$A' = \begin{bmatrix} 9 & -18 & -18 \\ -12 & 9 & 24 \\ -11 & 12 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj } A = \begin{bmatrix} 9 & -12 & -11 \\ -18 & 9 & 12 \\ -18 & 24 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{-45}\begin{bmatrix} 9 & -12 & -11 \\ -18 & 9 & 12 \\ -18 & 24 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{9}{-45} & \frac{-12}{-45} & \frac{-11}{-45} \\ \frac{-18}{-45} & \frac{9}{-45} & \frac{12}{-45} \\ \frac{-18}{-45} & \frac{24}{-45} & \frac{7}{-45} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{5} & \frac{4}{15} & \frac{11}{45} \\ \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-4}{15} \\ \frac{2}{5} & \frac{-8}{15} & \frac{-7}{45} \end{bmatrix}$$

مثال:

جد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

الحل:

$$\det A = 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2 - 0 + 4 = 6$$

$A_{11} = 2$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = 4$, $A_{21} = 2$

$A_{22} = 0$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = -2$, $A_{32} = -3$, $A_{33} = -1$

$$\therefore A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$adjA = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{-2}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{-2}{6} & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

انظمة المعادلات الخطية : System of Linear equations

أ- حل انظمة المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصوفة:

عرفنا سابقاأن نظام المعادلات الخطية يمكن كتابته بطريقة المصفوفات على الصورة

$AX = B$ .... (1)

حيث :

مصفوفة المعاملات : A

مصفوفة المتغيرات: X

مصفوفة الثوابت : B

ولحل نظام المعادلات الخطية باستخدام معكوس المصفوفة كالآتي:

- نجد معكوس المصفوفة A

- نضرب طرفي العلاقة (1) في A^{-1}

$A^{-1} Ax = A^{-1} B$

$\Rightarrow I_n x = A^{-1} B$

$\Rightarrow X = A^{-1} B$

∴ يكون حل النموذج بضرب معكوس المصفوفة A في المصفوفة B ويكون الناتج هو الحل .

مثال:

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة، ثم تأكد من الحل:

$2x + 3y = 1$

$3x - y = 7$

الحل:

مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الثوابت

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

نجد أولاً معكوس A حيث

$\det A = -2 - 9 = -11$

$$A^{-1} = \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-2}{11} \end{bmatrix}$$

ويكون حل النموذج هو :

$$X = A^{-1} B$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{11} & \frac{3}{11} \\ \frac{3}{11} & \frac{-2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{11} + \frac{21}{11} \\ \frac{3}{11} - \frac{14}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{22}{11} \\ \frac{-11}{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore \; x = 2 , \quad y = -1$

للتأكد نعوض قيم x , y في المعادلات الاولى

$2x + 3y = 1$

$\Longrightarrow 2(2) + 3(-1) = 4 - 3 = 1$

$3(2) - (-1) = 6 + 1 = 7$

مثال :

حل النظام التالي من المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة

$x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$3x_1 + 2x_2 = 5$

$x_1 - 4x_3 = -3$

الحل :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

معكوس A :

$$\det A = 1(-8-0) - 1(-12-0) - 1(0-2)$$

$$= -8 + 12 + 2 = 6$$

$A_{11} = -8$, $A_{12} = -12$, $A_{13} = -2$

$A_{21} = -4$, $A_{22} = -3$, $A_{23} = -1$

$A_{31} = 2$, $A_{32} = 3$, $A_{33} = -1$

$$A' = \begin{bmatrix} -8 & 12 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}A = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -8 & 4 & 2 \\ 12 & -3 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}.B = \begin{bmatrix} \frac{-4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 2 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{-1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-4}{3} & +\frac{10}{3} & -1 \\ 2 & -\frac{5}{2} & +\frac{3}{2} \\ \frac{-1}{3} & +\frac{5}{6} & +\frac{3}{6} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ب- حل انظمة المعادلات الخطية باستخدام المحددات (طريقة كرامر Cramur's rule)

حل نظام معادلتين بمجهولين :

الصورة العامة لنظام معادلتين بمجهولين هي :

$a_{11}x + a_{12}y = b_1$

$a_{21}x + a_{22}y = b_2$

خطوات الحل :

نعرف المصفوفات التالية:

1-مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

2-مصفوفة المتغيرات

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

3-مصفوفة الثوابت

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

نعرف المصفوفتان

$$Ax = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$Ay = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$$

تكون قيمة المتغيرات

$$x = \frac{\det(Ax)}{\det(A)}$$

$$y = \frac{\det(Ay)}{\det(A)}$$

مثال:

جد حل النظام التالي من المعادلات

$x + y = 1$

$2x + 3y = 5$

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad Ay = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$\Delta\, A = 3 - 2 = 1$

$\Delta\, (Ax) = 3 - 5 = -2$

$\Delta\, (Ay^{)} = 5 - 2 = 3$

$$x = \frac{\Delta(Ax)}{\Delta A} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$y = \frac{\Delta(Ay)}{\Delta A} = \frac{3}{1} = 3$$

ملاحظة:

اذا كانت محددة مصفوفة المعاملات A تساوي صفراً .

$\Delta\, A = 0$

فإن النظام لا يوجد له حل.

حل نظام ثلاثة معادلات بثلاثة مجاهيل:

الصورة العامة لنظام ثلاثة معادلات بثلاثة مجاهيل:

$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$

$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$

$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$

نعرف المصفوفات التالية كما في نظام معادلتين بمجهولين

1- مصفوفة المعاملات

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

2- مصفوفة المتغيرات

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

3- مصفوفة الثوابت

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

4- نعرف المصفوفات التالية

$$Ax = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$Ay = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$Az = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

وتكون قيم المتغيرات هي:

$$x = \frac{\det(Ax)}{\det A} \quad , \quad y = \frac{\det(Ay)}{\det A} \quad , \quad z = \frac{\det(Az)}{\det A}$$

مثال:

جد حل النظام التالي من المعادلات

$2x + y + 3z = 3$

$x + 2y + 2z = 5$

$5x + 3y + 6z = 7$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$\Delta A = 2(12-6) - 1(6-10) + 3(3-10)$

$= 12 + 4 - 21 = -5$

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$\Delta Ax = 3(12-6) - 1(30-14) + 3(15-14)$

$= 18 - 16 + 3 = 5$

$$Ay = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$\Delta Ay = 2(30-14) - 3(6-10) + 3(7-25)$

$= 32 + 12 - 54 = -10$

$$Az = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$\Delta Az = 2(14-15) - 1(7-25) + 3(3-10)$

$= -2 + 18 - 21 = -5$

$$\therefore x = \frac{\Delta(Ax)}{\Delta A} = \frac{5}{-5} = -1$$

$$y = \frac{\Delta(Ay)}{\Delta A} = \frac{-10}{-5} = 2$$

$$z = \frac{\Delta(Az)}{\Delta A} = \frac{-5}{-5} = 1$$

مثال:

جد حل النظام التالي من المعادلات :

$x + 2y + 6z = 7$

$3x + y + 3z = 5$

$4y + 12z = 10$

الحل:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \quad , \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$\Delta A = 1(12 - 12) - 2(36 - 0) + 6(12 - 0)$

$= 0 - 72 + 72 = 0$

بما أن $\Delta A = 0$ فإن النظام لا يوجد له حل.

تمــارين

-اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

أجب عن الأسئلة (1-6)

1- $A - B$

2- $4A + 3B$

3- $A . B$

4- A^2

5- $A . A^T$

6- $B^T . A$

7- اذا كانت

$$\begin{bmatrix} x-2 & 3 & 4 \\ 5 & y^2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

فجد قيمة x , y

8- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

وكانت $C = A . B$

$D = B . A$

فجد ما يلي:

1- C_{13} , C_{32}

2- D_{11} , D_{22}

9- اذا كانت

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 22 & 32 \end{bmatrix}$$

فجد قيمة كل من a , b , c , d

-احسب معكوس المصفوفات في الاسئلة (13-10) باستخدام عمليات الصف البسيط.

10- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

11- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 6 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

12- $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 7 & 12 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

13- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 2 & 3 \\ 8 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

- حل أنظمة المعادلات في الاسئلة (17-14) باستخدام عمليات الصف البسيط

14- $2x + 3y = 6$

$x - y = 1$

15- $x + y + z = 3$

$6x + 2y - 4z = 4$

$2x - y = 1$

16- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7$

$3x_1 - x_3 + 2x_4 = 6$

$5x_2 + 6x_3 + 7x_5 = 18$

$-x_1 - 3x_2 + x_1 + 2x_5 = 1$

17- $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 18$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 6$

$4x_1 + 6x_2 + 8x_3 = 12$

- جد محددة المصفوفة في الاسئلة (18-24)

18- $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

19- $B = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 5 & 10 & -7 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

20- $C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 8 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

21- I_5

22- $D = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 & 10 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 15 & 7 & 19 & 3 \end{bmatrix}$

23- $F = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

24- $E = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 12 & 20 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

- اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

أجب عن الاسئلة (25-28)

25- $|A . B|$

26- $|A^{-1}|$

27- $|A^{T}|$

28- $(AB)^{-1}$

29- جد قيمة (x) التي تجعل المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} x & 3 & 2 \\ x-1 & 5 & 3 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

مصفوفة منفردة

30- جد القيم الحقيقية لـ x التي تجعل المصفوفة

$$B = \begin{bmatrix} x & 2 \\ +3 & x-5 \end{bmatrix}$$

مصفوفة غير منفردة

- جد معكوس المصفوفة في الاسئلة (31-33) باستخدام المحددات

31- $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$

32- $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

33- $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

- جد حل النظام من المعادلات باستخدام طريقة كرامر للاسئلة (34-36)

34- $6x + 7y = 18$

$3x - 2y = 0$

35- $2x + y + z = 7$

$x - 2y + 4z = 12$

$3x + 3y + 3z = 25$

36- $4x + y = 5$

$x + 2z = 3$

$y + 4z = 9$

37- في النظام التالي من المعادلات

$2x + 3y + 4z = 13$

$x - 2y - 3z = 5$

$y + z = 3$

اذا عبرنا عن النظام بطريقة المصفوفات على الصورة

$AX = B$

استخدام معكوس المصفوفة في ايجاد حل النظام .

38- اذا كان لدينا النظام التالي من المعادلات

$ax + by = 4$

$2ax - 3by = 3$

وكان حل النظام هو $x = 1 , y = 1$ ، فجد قيمة a , b .

الوحدة الخامسة
التفاضل وتطبيقاته

Differentiation and Its Applications

الوحدة الخامسة
التفاضل وتطبيقاته
Differentation and Its Application

مفهوم النهاية: Limit

النهايات هي أساس حساب التفاضل والتكامل وهي تعبر عن سلوك منحنى اقتران ما $f(x)$ عندما يقترب المتغير x من قيمة معينة ولتوضيح ذلك نأخذ الاقتران التالي

$$f(x) = 2x + 1$$

ونرى ما هو سلوك الاقتران كلما اقتربت x من صفر من خلال الجدول التالي:

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.8	0.98	0.998	1.002	1.02	1.2

نرى أن الاقتران $f(x)$ يقترب من العدد (1) كلما اقتربت x من صفر وبالرموز نكتبها كالاتي:

$$x \to 0 \qquad f(x) \to 1$$

ونقول أن نهاية $f(x) = 1$ عندما x تقترب من صفر وتكتب بالرموز

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

في هذا الاقتران نجد أن $f(0) = 1$ ولكن ذلك ليس بالضرورة فقد يكون الاقتران غير معرف عند النقطة ولكن نهايته عندها موجودة

مثال:

إذا كانت $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ فجد

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

الحل:

هذا الاقتران غير معرف عند $x = 2$ ولكننا سنرى أن نهايته موجودة عند $x = 2$

لإيجاد النهاية نطبق إحدى الطريقتين التاليتين:

1- طريقة الجدول:

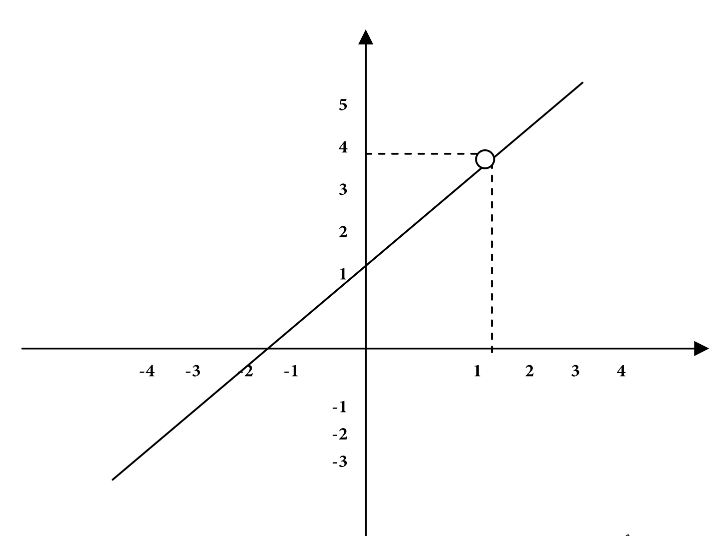
x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
f(x)	3.9	3.99	3.999	4.001	4.01	4.1

نرى أن $f(x)$ يقترب من (4) كلما x اقتربت من (2)

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

2- طريقة الرسم البياني:

نرسم الاقتران ومن خلال الرسم نجد النهاية



من خلال الرسم نرى أن الاقتران يقترب من (4) ولا يساويه عندما x تقترب من (2)

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = 4$$

تعريف:

اذا كـــان f معـــرف عـــلى الفـــترة المفتوحـــة I وكانـــت $a \in I$ (لـــيس بالضرورة أن يكون معرف عند (a) وكانت L أي عدد حقيقي فان :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

اذا كان لكل $\in > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث أن اذا كان $| x - a | < \delta$ فان

$$| f(x) - L | < \in$$

مثال:

باستخدام التعريف أثبت أن

$$\lim_{x\to 1} 3x - 1 = 2$$

الحل

$f(x) = 3x - 1 \qquad a = 1 \qquad L = 2$

حتى تكون النهاية موجودة يجب أن يكون لكل $\in > 0$ ، يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |(3x-1)-2| < \in$$

ولايجاد ذلك يجب ايجاد قيمة لـ δ تعتمد على $\in$ ونأخذ المتباينة

$$| 3x-1-2 | < \in$$

$$\Rightarrow | 3x-3 | < \in$$

$$\Rightarrow | 3(x-1) | < \in$$

$$\Rightarrow 3| x - 1 | < \in$$ بالقسمة على 3

$$\Rightarrow |x-1| < \frac{\in}{3}$$

$\therefore$ يوجد $\delta = \frac{\in}{3}$ بحيث $|x-1| < \delta$

$$\therefore \lim_{x\to 1} (3x-1) = 2$$

مثال:

أثبت باستخدام التعريف أن

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$$ غير موجودة

الحل:

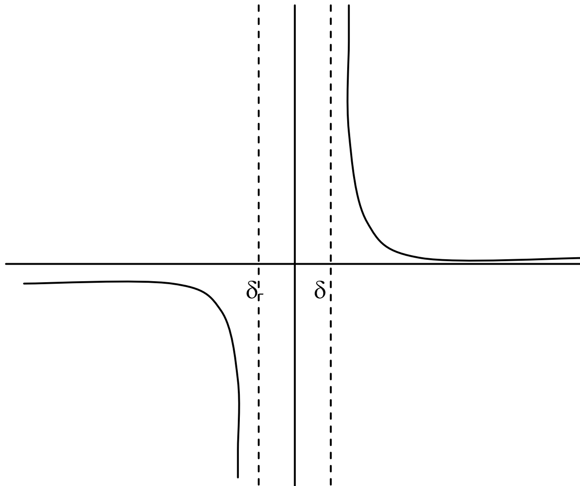
نستخدم البرهان غير المباشر ونفرض أن

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = L$$

لنأخذ الفترة $(-\delta , \delta)$ ولتكن $x \in (-\delta , \delta)$

بحيث تكون $L \in (-\in , \in)$

من خلال الرسم أدناه للاقتران $\frac{1}{x}$



نلاحظ أنه كلما كانت δ صغيرة جدا ∈ تكبر وتكون كبيرة جدا وهذا يعني أن الاقتران f (x) يؤول الى المـالا نهاية وبالتالي لا يمكن ايجاد δ بحيث يكون التعريف صحيحاً فليس صحيحا أن

$$(\forall \in > 0, \exists \delta > 0 : |x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \in$$

∴ فرضنا خاطيء والنهاية غير موجودة

نظريات في النهايات:

نظرية (1)

اذا كانت $a, k \in \mathbf{R}$ فان:

$$\lim_{x \to a} k = k$$

مثال:

$$\lim_{x \to 8} 5 = 5$$

نظرية (2)

اذا كانت $a, b, m \in \mathbf{R}$ فان

$$\lim_{x \to a} (mx + b) = ma + b$$

مثال:

جد $\lim_{x \to -1} 5x - 4$

الحل:

$$\lim_{x \to -1} 5x - 4 = (5)(-1) - 4 = -5 - 4 = -9$$

نظرية (3)

اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ، وكانت $\lim_{x \to a} h(x) = m$ فإن

1- $\lim_{x \to a} [f(x) + h(x)] = L + m$

2- $\lim_{x\to a} [f(x) . h(x)] = L . m$

3- $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{L}{m}$, $m \neq 0$

مثال: جد

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-1}{2x+2}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x-1}{2x+2} = \frac{\lim_{x\to a} 3x-1}{\lim_{x\to 1} 2x+2} = \frac{(3)(1)-1}{(2)(1)+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

مثال:

جد $\lim_{x\to a} x^2$

الحل:

$$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x . x = \lim_{x\to a} x . \lim_{x\to a} x = a . a = a^2$$

نتيجة (1)

لأي عدد طبيعي n فإن $\lim_{x\to a} x^n = a^n$

نتيجة (2)

لأي عدد طبيعي n فإن $\lim_{x\to a} [f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$

مثال:

جد $\lim_{x\to 1} (x^3 - 4)^5$

الحل:

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - 4)^5 = [\lim_{x \to 1} (x^3 - 4)]^5$$

$$= [1^3 - 4]^5$$

$$= (-3)^5$$

$$= -243$$

نتيجة (3)

$$\lim_{x \to a} [k f(x)] = k \lim_{x \to a} f(x) \quad , \quad k \in R$$

نتيجة (4)

$$\lim_{x \to a} [f(x) - h(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} h(x)$$

مثال:

$$\lim_{x \to 2} (5x^2 - 6)^3$$

الحل:

$$\lim_{x \to 2} (5x^2 - 6)^3 = [\lim_{x \to 2} (5x^2 - 6)]^3$$

$$= [5(2)^2 - 6]^3$$

$$= [20 - 6]^3$$

$$= 2744$$

نظرية (4)

اذا كان f كثير حدود فإن

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) , \ \forall a \in R$$

مثال:

$\lim_{x\to 2} (x^4 - 3x^2 + 5x - 7)$ جد

الحل:

$$\lim_{x\to 2} (x^4 - 3x^2 + 5x - 7) = (2)^4 - 3(2)^2 + (5)(2) - 7$$
$$= 16 - 12 + 10 - 7$$
$$= 7$$

نظرية (5)

اذا كان k(x) اقتران نسبي فان

$$\lim_{x\to a} k(x) = k(a)$$

مثال:

$\lim_{x\to -1} \frac{5x^2 - 3x + 4}{x - 3}$ جد

الحل:

$$\lim_{x\to -1} \frac{5x^2 - 3x + 4}{x - 3} = \frac{(5)(-1)^2 - 3(-1) + 4}{-1-3}$$
$$= \frac{5+3+4}{-4}$$
$$= \frac{12}{-4} = -3$$

نظرية (6)

اذا كانت a > 0 فإن

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x}}{4-\sqrt{x^3}}$$

الحل:

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x}}{4-\sqrt{x^3}}=\frac{\lim_{x\to a}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x}}{\lim_{x\to a}4-\sqrt{x3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{(1)^2}-3\sqrt{1}}{4-\sqrt{(1)3}}$$

$$=\frac{1-3}{4-1}=\frac{-2}{3}$$

نظرية (7)

اذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ فان

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to 3}\sqrt{x^2-3x+1}$$

الحل:

$$\lim_{x\to3}\sqrt{x^2-3x+1}=\sqrt{\lim_{x\to3}\left(x^2-3x+1\right)}$$

$$=\sqrt{3^2-(3)(3)+1}$$

$$=\sqrt{1}=1$$

حساب النهايات:

في بعض الاقترانات النسبية تكون نتيجة التعويض كمية غير معرفة مثل

$\frac{0}{0}$ ، $0\cdot\infty$ ، $\infty-\infty$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

ولكن اذا رسمنا الاقتران نجد أن هناك نهاية للاقتران موجودة، وفي هذه الحالة نلجأ الى تحليل الاقتران.

مثال: جد

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

الحل:

بالتعويض المباشر يكون الناتج $\frac{0}{0}$ $\therefore$ نلجأ للتحليل

$$\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=x+2$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}x+2=2+2=4$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{x^3-27}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^3-27}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^3-27}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x^2+3x+9)}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2+3x+9}$$

$$=\frac{1}{3^2+(3)(3)+9}$$

$$=\frac{1}{27}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}x-2=3-2=1$$

مثال: جد

$$\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}=\frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to 25}\frac{x-25}{\sqrt{x}-5}\times\frac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}+5}$$ (الضرب بالمرافق)

$$= \lim_{x\to 25}\frac{(x-25)(\sqrt{x}+5)}{x-25}$$

$$= \lim_{x\to 25}\sqrt{x}+5$$

$$= \sqrt{25}+5$$

$$= 10$$

مثال: جد

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)$$

الحل:

بالتعويض المباشر تكون النتيجة (∞ . 0) كمية غير معرفة وهنا أيضا نلجأ للتحليل.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x\sqrt{x+1}}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)}{x\sqrt{x+1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}\times\frac{1+\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}$$ بالضرب بالمرافق

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)}{x\left(\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\left(\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\frac{-1}{\left(\sqrt{0+1}\right)\left(1+\sqrt{0+1}\right)}$$

$$=\frac{-1}{2}$$

مثال: جد

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+9}-\frac{1}{9}}{x}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+9}-\frac{1}{9}}{x}=\frac{0}{0}$$

بتوحيد المقامات في البسط

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{9-(x+9)}{9(x+9)}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{9-x-9}{(x)(9)(x+9)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-x}{(x)(9)(x+9)}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-1}{9(x+9)}$$

$$= \frac{-1}{9(0+9)}$$

$$= \frac{-1}{81}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+5}{x-2}$$

الحل:

بالتعويض المباشر ينتج

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+5}{x-2}$$

$$=\frac{4-8+5}{2-2}$$

$$= \frac{1}{0} = \infty \quad \text{(غير موجودة)}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x-7}$$

الحل:

بالتعويض المباشر ينتج أن

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x-7}=\frac{0}{0}$$

نلجأ للتحليل وفي هذه الحالة نستخدم طريقة تسمى الاستبدال وهي:

نفرض: $x=y^3-1 \Leftarrow y^3=x+1 \Leftarrow y=\sqrt[3]{x+1}$

وأيضا $x\to 7 \Rightarrow y\to 2$

$$\therefore \lim_{x\to 7}\frac{\sqrt[3]{x+1}-2}{x-7}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{y^3-1-7}=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{y^3-8}$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{y-2}{(y-2)(y^2+2y+4)}$$

$$=\lim_{y\to 2}\frac{1}{y^2+2y+4}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$$

مثال:

جد

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x+1}$$

الحل:

عند التعويض المباشر تكون النهاية

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3+x+2}{x+1}=\frac{0}{0}$$

وهنا نستخدم طريقة القسمة الطويلة

	$x^2 - x + 2$
$x + 1$	$X^3 + x + 2$
	$- x^3 \pm x^2$
	$-x^2 + x + 2$
	$-x2 \pm x$
	$2x + 2$
	$2x + 2$
	$0 \quad 0$

$$\therefore \lim_{x\to -1} \frac{x^3 + x + 2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 2)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} x^2 - x + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

النهاية من طرف واحد: One side limit

هناك بعض الاقترانات مثل الاقتران المتشعب يكون فيها الاقتران غير معرف عند نقطة (نقاط) التشعب ولايجاد النهاية لمثل هذه الاقترانات نحتاج الى طريقة لاثبات أن النهاية ستكون واحدة سواء أخذت أكبر من النقطة أو اقل من النقطة، وفي بعض الاقترانات الاخرى يكون الاقتران معرف على فترة محددة مثل اقترانات الجذور وفي مثل هذه الاقترانات اذا أردنا معرفة سلوك الاقتران عند نقطة نهاية التعريف نأخذ النهاية من طرف واحد فقط كما في الامثلة التالية:

مثال:

ابحث في نهاية الاقتران $f(x) = \sqrt{x}$ عندما $x \to 0$

الحل:

نرى هنا أن الاقتران غير معرف عندما $x < 0$ وبالتالي لا نستطيع أخذ قيم للنهاية عندما $x < 0$ ،
وهنا نأخذ النهاية من طرف واحد فقط وهو عندما $x > 0$ أي من اليمين ونرمز لها بالرمز $x \to 0^+$

ولنشكل الجدول التالي

x	0.1	0.01	0.001	0.0001
f(x)	0.32	0.1	0.032	0.01

نرى هنا أنه كلما اقتربت x من صفر من اليمين يقترب f(x) من صفر وبالرموز

$$x \to 0^+ \Rightarrow f(x) \to 0$$

أو

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

أي نهاية f(x) من اليمين تساوي صفر.

تعريف: (النهاية من اليمين)

اذا كان f اقتران معرف على الفترة (a , c) وكانت $L \in \mathbf{R}$

فإن

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

تكون صحيحة اذا كان $0 < \in \forall$ ، $0 < \delta \exists$ بحيث

$$a < x < \delta + a \Rightarrow | f(x) - L | < \in$$

مثال:

ابحث في نهاية الاقتران $f(x) = \sqrt{1 - x}$ عندما x تقترب من 1

الحل:

في هــذا المثــال ايضــاً نــرى أن الاقــتران غــير معــرف عنــدما $x > 1$
وبالتالي سنأخذ القيم التي تكون أقل من (1) وهذه تسمى النهاية من اليسار ونرمـز لهـا بـالرمز $x \to 1^-$
كما في الجدول التالي:

x	0.9	0.99	0.999	0.9999
f(x)	0.32	0.1	0.032	0.01

نرى هنا أيضا أنه كلما اقتربت x من (1) من اليسـار يقـترب f(x) مـن صـفر، وبـالرموز $x \to 1^-$ فـان $f(x) \to 0$

أو $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$

أي نهاية f (x) من اليسار تساوي صفر

تعريف:

اذا كان f إقتران معرف على الفترة (c , a) وكان $L \in \mathbf{R}$ فان

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

صحيحة اذا كان $\forall \in > 0$ ، $\delta > 0$ بحيث اذا كان

$$a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \in$$

مثال:

اذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x > 3 \\ 2x + 1 & x < 3 \end{cases}$$

جد:

1- $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

2- $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

الحل:

1- $\lim_{x \to 3^+} f(x)$

نأخذ قاعدة الاقتران عندما $x > 3$ أي عندما x تؤول الى 3 من اليمين.

$$\therefore \lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} x^2 - 2 = (3)^2 - 2 = 7$$

2- $\lim_{x \to 3^-} f(x)$

نأخذ قاعدة الاقتران عندما $x < 3$ أي عندما x تؤول الى 3 من اليسار

$$\therefore \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} 2x + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

نلاحظ من خلال المثال أن النهاية من اليمين والنهاية من اليسار متساويتان وهذا يعني أن النهاية موجودة، وهذا ما ستوضحه النظرية التالية:

نظرية:

اذا كان f معرف على فترة مفتوحة I تحوى a وليس بالضرورة أن يكون الاقتران معرف عندها فان

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

مثال:

باستخدام النهاية من اليمين والنهاية من اليسار اثبت أن نهاية الاقتران

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & x > 1 \\ \frac{1}{x} & x < 1 \ , \ x \neq 0 \end{cases}$$

غير موجودة عند $x = 1$

الحل:

حتى تكون النهاية موجودة يجب أن تكون النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$$

بما أن

$$\lim_{x\to1^+} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x)$$ غير موجودة

مثال:

جد $\lim_{x\to2}|x-2|$ اذا كانت موجودة

الحل:

نعيد تعريف الاقتران باستخدام قاعدة الاقتران المتشعب

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & x>2 \\ 2-x & x<2 \end{cases}$$

حتى تكون النهاية موجودة يجب أن تكون النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار عند x = 2

$$\lim_{x\to2^+} |x-2| = \lim_{x\to2^+} x-2 = 2-2 = 0$$

$$\lim_{x\to2^-} |x-2| = \lim_{x\to2^-} 2-x = 2-2 = 0$$

بما أن

$$\lim_{x\to2^+} |x-2| = \lim_{x\to2^-} |x-2| = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to2} |x-2| = 0$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

جد $\lim_{x \to 1} f(x)$ ان وجدت

الحل:

في هذه الحالة تكون النهاية من اليمين والنهاية من اليسار على نفس القاعدة

$$\therefore \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \to 1^+} x^2 + x + 1$$

$$= 1^2 + 1 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 1^1} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 3$$

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x < 1 \\ -1 & x \geq 1 \end{cases}$$

جد $\lim_{x \to 1} f(x)$ اذا كانت موجودة.

الحل:

حتى تكون النهاية موجودة يجب أن تكون النهاية من اليمين = النهاية من اليسار نجد في البداية النهاية من اليمين

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} -1 = -1$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{|x|}{x}$$

في هذه الحالة نعيد تعريف الاقتران $\frac{|x|}{x}$ لايجاد النهاية

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & 0 \le x < 1 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

ونجد النهاية لهذا الاقتران من اليسار فقط

النهاية من اليسار

$$\lim_{x\to1^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to1^-} 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to1^+} f(x) \neq \lim_{x\to1^-} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)$ غير موجودة

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 1}{x+1} & x \ge 1 \\ ax - 1 & x < 1 \end{cases}$$

جد قيمة a التي تجعل $\lim_{x\to1} f(x)$ موجودة

الحل:

حتى تكون النهاية موجودة يجب أن تكون النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x^2-1}{x+1} = \frac{2(1)^2-1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax - 1 = (a)(1) - 1 = a - 1$$

بما أن النهاية موجودة ∴ النهاية من اليمين = النهاية من اليسار

$$\therefore \frac{1}{2} = a - 1$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

∴ قيمة a التي تجعل النهاية موجودة هي $\frac{3}{2}$

الاتصال: Continuity

لنأخذ المثالين التاليين وندرس سلوكهما ثم نرى ما الفرق بينهما

مثال:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$$

لندرس سلوك هذا الاقتران عند x = 1 مع ملاحظة أن الاقتران معرف عند x = 1 نجد في البداية نهاية الاقتران عن طريق النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x - 1$$

$$= (2)(1) - 1 = 1$$

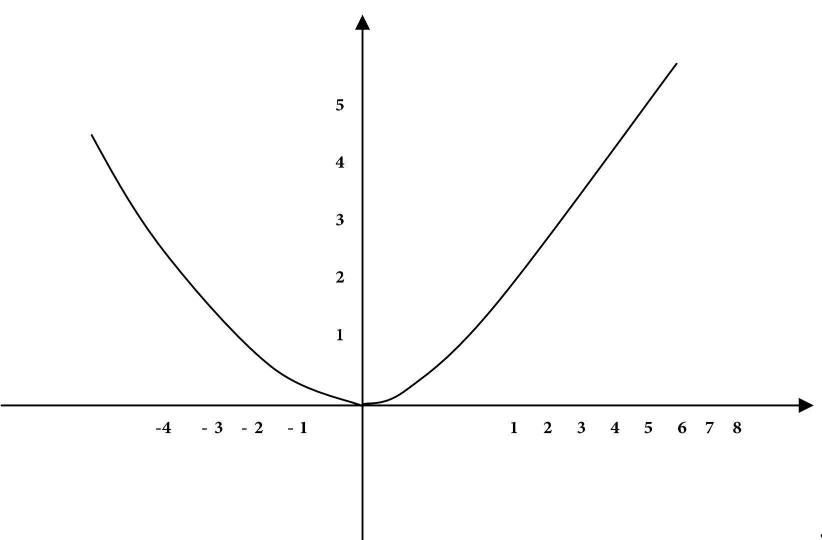
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

$$f(1) = (2)(1) - 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$$

وعند رسم الاقتران نرى هنا أنه لا يوجد قطع في الاقتران أي أنه مستمر أو متصل.



مثال:

ادرس سلوك الاقتران التالي:

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 2 & x = 2 \end{cases}$$

الحل:

نرى هنا أن الاقتران معرف عند $x = 2$

ولايجاد نهاية الاقتران عندما x تقترب من (2) نأخذ الجزء الاول من الاقتران سواء من اليمين أو اليسار.

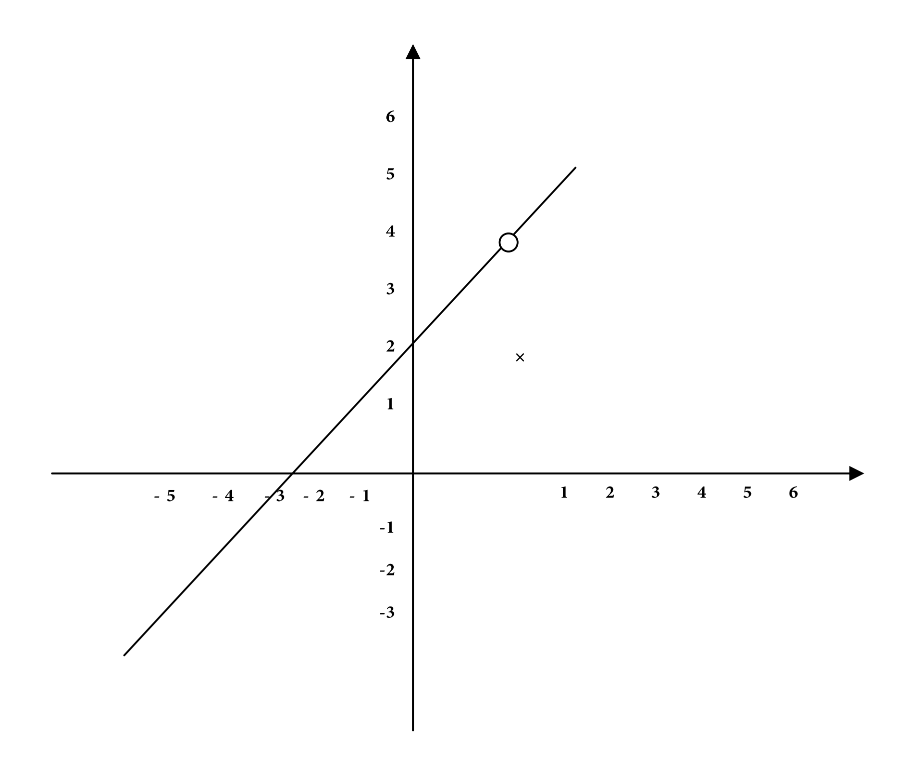
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} x+2 = 4$$

أما $f(2) = 2$

ونرى هنا أن $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$

وعند رسم الاقتران بيانياً نجد أن هناك قطع في الاقتران عند $x = 2$



من ملاحظتنا للمثالين السابقين نرى أن الاقتران الاول متصل بمعنى ان لا يوجد أي قطع في منحنى الاقتران بينما الاقتران الثاني غير متصل أي يوجد قطع للاقتران عند $x = 2$ وقد حقق الاقتران الاول الشروط التالية وهي الشروط التي يجب ان تتحقق في الاقتران حتى يكون متصل عند أي نقطة مثل $x = a$:

1- أن يكون الاقتران معرف عند $x = a$

2- نهاية الاقتران موجودة عند $x = a$

3- $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

وفي مثالنا الثاني لاحظنا أن $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

أي أن الاقتران لم يحقق الشرط الثالث من شروط الاتصال وبالتالي يكون الاقتران غير متصل (منفصـل) اذا لم يحقق شرط أو أكثر من الشروط السابقة

مثال:

ابحث في اتصال الاقتران التالي عند $x = 1$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

الحل:

1- من تعريف الاقتران نجد أن الاقتران معرف عند $x = 1$

2- $$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} x + 1 = 2$$

3- $$f(1) = 2 = \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$\therefore$ الاقتران متصل عند $x = 1$

مثال:

ابحث في اتصال الاقتران التالي عند $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & x > 3 \\ x+1 & x \leq 3 \end{cases}$$

الحل:

1- الاقتران معرف عند $x = 3$

2- لايجاد $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ نجد النهاية من اليمين والنهاية من اليسار

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} x+1$$

$$= 3 + 1 = 4$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{x^2-9}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^+} x+3 = 6$$

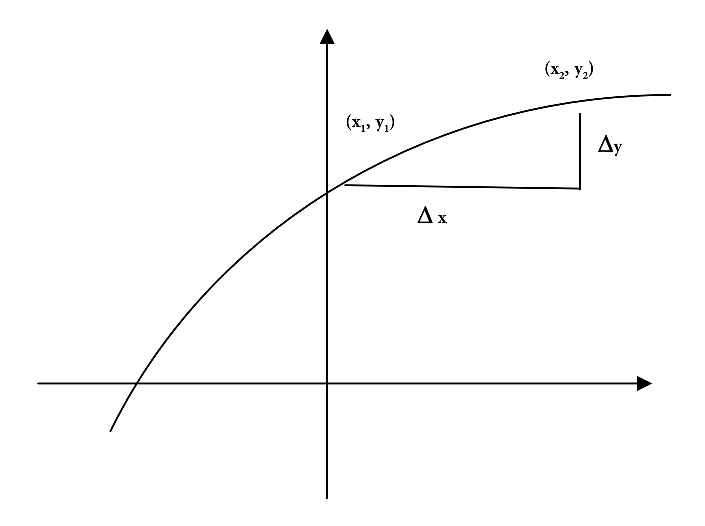
$$\therefore \lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 3} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ $f(x)$ غير متصل عند $x = 3$

متوسط التغير: Rate of Change

اذا كان f(x) اقتران معرف على الفترة [a , b] ومنحناه يمثل الشكل التالي:



واخذنا النقطتين (x_1, y_1) ، (x_2, y_2) على منحنى الاقتران فان التغير في قيمة x ما بين هاتين النقطتين هو $x_2 - x_1$ ويرمز له بالرمز Δx وتقرأ دلتا x والتغير في قيمة y هي

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

ويكون متوسط التغير = $\dfrac{\text{التغير في } y}{\text{التغير في } x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

حيث

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

نلاحظ من التعريف ان متوسط التغير يمثل ميل القاطع للمستقيم المار بالنقطتين $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ أي :

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

مثال:

اذا كان $f(x) = x^2 - 2x + 5$ وتغيرت x من $x_1 = 0.1$ إلى $x_2 = 0.3$ فجد ما يلي:

a) Δx.

b) Δy.

c) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

الحل:

a) $\Delta x = x_2 - x_1 = 0.3 - 0.1 = 0.2$

b) $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$

$= f(0.3) - f(0.1)$

$= [(0.3)^2 - 2(0.3) + 5] - [(0.1)^2 - 2(0.1) + 5]$

$= 4.49 - 4.81$

$= -0.32$

c) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-0.32}{0.2} = -1.6$$

مثال:

جد معادلة المستقيم الذي يقطع منحنى الاقتران $f(x) = \sqrt{x+1}$ عند x=0 وعند x=3 .

الحل:

نجد ميل القاطع أولاً وهو

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{\sqrt{3+1} - \sqrt{0+1}}{3-0} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$$

∴ معادلة المستقيم هي :

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}\,(x - 0)$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{3}x + 1$$

$$\Rightarrow 3y = x + 3$$

المشتقة: The derivative

اذا أخذنا النهاية لمتوسط التغير عندما $\Delta x \to 0$ فإننا نرمز لها بالرمز $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

لتكن

$$x_2 \to x_1 ,\ h \to 0 \Leftarrow x2 = h + x_1 \Leftarrow h = x_2 - x_1$$

$$\therefore \lim_{x_2 \to x} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_1 - x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

ويكون هذا تعريف المشتقة كما سنتعرف عليه في التعريف التالي واذا كانت المشـتقة هـي نهايـة متوسـط التغير فإن ميل المماس = نهاية ميل القاطع .

تعريف: اذا كان f(x) اقتران معرف على الفترة [a , b] وكانت $x_1 \in (a, b)$ فان مشتقة الاقتران f(x) عند x $= x_1$ ويرمز لها بالرمز $f'(x_1)$ هي

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

ويرمز لها أيضا بعدة رموز منها

$$\frac{dy}{dx}, y', \frac{d}{dx}$$

ملاحظة: تكون المشتقة موجودة إذا كانت النهاية موجودة

مثال:

اذا كان $f(x) = 3x - 7$ فجد $f'(1)$

الحل:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h) - 7 - 3(1) - 7}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3 + 3h - 7 - 3 + 7}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h}{h} = 3$$

تعريف:

يكون الاقتران f قابل للاشتقاق على الفترة (a , b) اذا كانت مشتقة f موجودة عند كل نقطة مـن نقاط الفترة. وتكتب على الصورة

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال:

اذا كان $f(x) = x^2$ فجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2xh + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2x + h$$

$$= 2x$$

مثال:

اذا كان $f(x) = \sqrt{x+1}$ فجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$$

بالضرب بالمرافق

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h+1)-(x+1)}{h\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

مثال:

اذا كان $f(x) = \frac{1}{x}$ حيث $x \neq 0$ فجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h \times (x+h)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

نظرية: اذا كان f قابل للاشتقاق عند $x = x_0$ فإن f متصل عن $x = x_0$

ملاحظة: عكس النظرية غير صحيح والمثال التالي يوضح ذلك

مثال:

اذا كانت $f(x) = |x|$ فهل f متصل وقابل للاشتقاق

الحل:

أولا: نبحث في إتصال الاقتران

نعيد تعريف الاقتران

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

نجد النهاية من اليمين ومن اليسار:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -x = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

$\therefore$ f متصل عند $x = 0$

ثانيا: نبحث في قابلية الاشتقاق من اليمين واليسار عند $x = 0$

$$f'_+(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(h+0) - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-(0+h) - (0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

$$\Rightarrow f'_+(0) \neq f'_-(0)$$

$\therefore$ f غير قابل للاشتقاق .

قواعد الاشتقاق: Techniques of differentiation

1- اذا كان $f(x) = c$ حيث c ثابت فان

$$f'(x) = 0$$

مثال:

اذا كان $f(x) = 97$ فجد $f'(x)$

$f'(x) = 0$

2- اذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد طبيعي

فان $f'(x) = n x^{n-1}$

مثال:

اذا كان $f(x) = x^3$ فجد $f'(x)$

$f'(x) = 3x^2$

3- اذا كان $f(x)$ $h(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فان

$$(f \pm h)'(x) = f'(x) \pm h'(x)$$

مثال:

جد مشتقة الاقتران $f(x) = x^4 - x^2 + 12$

$f'(x) = 4x^3 - 2x + 0$

$= 4x^3 - 2x$

4- اذا كان $f(x)$ ، اقتران قابل للاشتقاق وكانت k عدد حقيقي فان

$$(k f(x))' = k f'(x)$$

مثال:

جد مشتقة الاقتران $f(x) = 3x^3 + 7x^2 - 5x$

الحل:

$$f'(x) = (3)(3)x^2 + (7)(2)x - (5)(1)$$
$$= 9x^2 + 14x - 5$$

-5 اذا كان $f(x)$، $h(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق فان

$$(f \cdot h)'(x) = f'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot h'(x)$$

مثال:

جد مشتقة الاقتران $f(x) = (2x^2 - 4)(4x + 3)$

الحل:

$$f'(x) = (2x^2 - 4)(4) + (4x)(4x + 3)$$
$$= 8x^2 - 16 + 16x^2 + 12x$$
$$= 24x^2 + 12x - 16$$

-6 اذا كان $f(x)$, $h(x)$ قابلين للاشتقاق فان

$$\left(\frac{f}{h}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot h(x) - f(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2} \qquad , h(x) \neq 0$$

مثال:

جد مشتقة الاقتران $f(x) = \frac{1}{x}$

الحل:

$$f'(x) = \frac{(0) \cdot (x) - (1)(1)}{x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

مثال:

اذا كانت $y = \frac{x+1}{x^2}$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+1)'(x^2)-(x+1)(x^2)'}{(x^2)^2}$$

$$=\frac{x^2-2x(x+1)}{x^4}$$

$$=\frac{-x^2-2x}{x^4}=-\frac{x+2}{x^3}$$

-7 اذا كان $f(x) = x^{-n}$ حيث n عدد طبيعي   **فان $f'(x) = -n\,x^{-n-1}$**

مثال:

اذا كان $f(x)=\frac{1}{x^2}$ فجد $f'(x)$

الحل:

$f(x) = x^{-2}$

$f'(x) = -2x^{-3}$

$=\frac{-2}{x^3}$

-8 اذا كان $f(x)=x^{\frac{m}{n}}$ حيث $m , n \in I$ **فان** $f'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

مثال:

اذا كانت $y=\sqrt{x}$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

مثال:

اذا كان $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ فجد $f'(x)$

الحل:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

مثال :

جد معادلة المماس والعمودي على المماس للاقتران $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 2$ عند x=1 .

الحل :

- عندما x=1 فإن $y = f(1) = \sqrt{1} + \frac{1}{1^2} - 2 = 0$

- نجد ميل المماس عند x=1 وهي المشتقة الاولى عند x=1

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}$$

$$\therefore m = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{2}{(1)^3} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

∴ معادلة المماس هي :

$$Y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$Y - 0 = \frac{-3}{2}\,(x - 1)$$

$$\Rightarrow 2y = 3 - 3x$$

ومعادلة العمودي على المماس هي :

$$y - y_1 = \frac{-1}{m}\,(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-1}{\frac{-3}{2}}(x-1) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 3y = 2x - 2$$

قاعدة السلسلة: The Chain Rule

اذا كانت $y = f(z)\ ,\ z = h(x)$

فان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = (f \circ h)'(x)$$

$$= f'(z)\,.\,h'(x)$$

$$= f'(h(x))\,.\,h'(x)$$

مثال:

اذا كانت $y = 3z^2 - 5\ ,\ z = x^3 + 4x$

فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$= (6z)\ (3x^2 + 4)$

$= 6\ (x^3 + 4x)\ (3x^2 + 4)$

مثال:

اذا كانت $y = (3x^2 - 6\,x)^4$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

لتكن $z = 3\,x^2 - 6x \Longrightarrow y = z^4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

$= 4(z^3)\ (6x - 6)$

$= 4(3x^2 - 6x)^3\ (6x - 6)$

نتيجة: اذا كانت $y = (h\,(x))^n$

فان $\frac{dy}{dx} = n(h(x))^{n-1} h'(x)$

مثال:

اذا كانت $y = (4x - 7)^3$ فجد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = (3)(4x-7)^2(4)$$

$$= 12\ (4x-7)^2$$

مثال:

اذا كانت $y = \sqrt{(2x-3)^3}$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$ ، عند x=2

الحل:

$$y = (2x-3)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(2x-3)^{\frac{1}{2}} \cdot 2$$

$$= 3\sqrt{2x-3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = 3\sqrt{(2)(2)-3} = 3\sqrt{4-3}$$

$$= 3\sqrt{1} = 3$$

الاشتقاق الضمني: Implicit differentiation

هناك بعض الاقترانات يمكن فصل المتغير x عن المتغير y فيها ولكن هناك بعض الاقترانات لا يمكن فصل المتغيرات عن بعضها البعض وفي مثل هذه الاقترانات عندما نشتق y نضربها في $\frac{dy}{dx}$ وسنوضح الاشتقاق الضمني عن طريق الامثلة التالية:

مثال:

جد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران $y^2 + x^2 = 1$

الحل:

يمكن ايجاد المشتقة هنا بطريقتين:

الطريقة الاولى: نفصل المتغيرات

$$y = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} \cdot -2x$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{y}$$

الطريقة الثانية: نشتق ضمنياً

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$

مثال:

جد $\frac{dy}{dx}$ للمعادلة

$$y^2 + 2xy + x^2 = y^2 x$$

الحل:

$$2y\frac{dy}{dx} + 2y + 2x\frac{dy}{dx} + 2x = 2yx\frac{dy}{dx} + y^2$$

$$2y\frac{dy}{dx}+2x\frac{dy}{dx}-2xy\frac{dy}{dx}=y^2-2y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2y+2x-2xy\right)=y^2-2y-2x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-2y-2x}{2y+2x-2xy}$$

المشتقات العليا: Higher derivatives

مشتقة الاقتران f(x) هي $f'(x)=\frac{dy}{dx}$ وتسمى المشتقة الاولى

ومشتقة الاقتران $f'(x)$ هي $f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$ وتسمى المشتقة الثانية

ومشتقة الاقتران $f''(x)$ هي $f'''(x)=\frac{d^3y}{dx^3}$ وتسمى المشتقة الثالثة

والمشتقة $f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}$ تسمى المشتقة النونية f(x)

مثال:

جد المشتقة الثالثة للاقتران $y=\frac{1}{x}$

الحل:

$$y=\frac{1}{x}=x^{-1}$$

المشتقة الاولى

$$\frac{dy}{dx}=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$$

المشتقة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

المشتقة الثالثة

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$$

مثال:

جد المشتقة الثانية للاقتران $f(x) = \sqrt{x}$

الحل:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

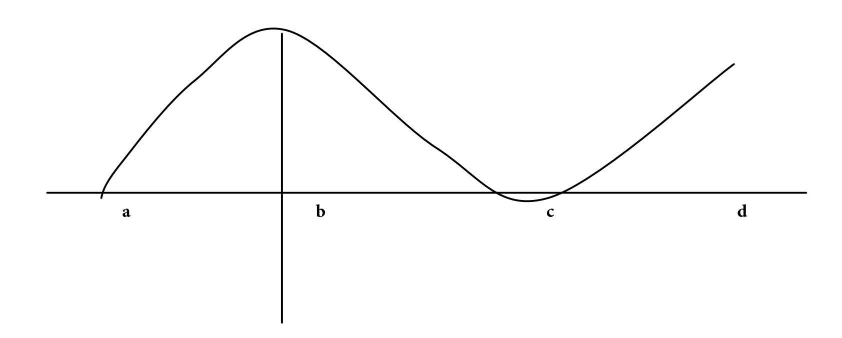
المشتقة الأولى

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

المشتقة الثانية

$$f''(x) = \frac{-1}{4}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$$

التزايد والتناقص: Increase and Dearease



لو نظرنا إلى هذا الاقتران نرى أنه يتزايد في الفترة [a,b] ويتناقص في الفترة [b,c] ثم يعود ليتزايد في الفترة [c,d] ، ولتعريف التزايد والتناقص نأخذ التعريف التالي:

تعريف:

اذا كان $f(x)$ معرف على الفترة [a,b] وكان $x_1 , x_2 \in [a,b]$ فان:

أ- يكون الاقتران f متزايد على الفترة [a,b] اذا كانت

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ب- يكون الاقتران f متناقص على الفترة [a,b] اذا كانت

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

جـ- يكون الاقتران ثابت اذا كانت

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

مثال:

ابحث في فترات التزايد والتناقص للاقتران $f(x) = x^2$

الحل:

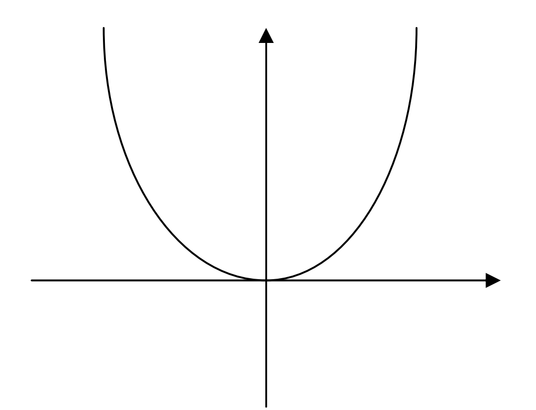
نلاحظ من خلال الرسم أن

الاقتران متزايد على الفترة

$[0 , \infty)$

ومتناقص على

الفترة $(-\infty,0]$



نلاحظ هنا أننا اعتمدنا على الرسم في تحديد فترات التزايد والتناقص ولكن هذه الطريقة ليست فعالة في كل الاحيان ولذلك لابد من طريقة أخرى لتحديد فترات التزايد والتناقص وهذه الطريقة هي طريقة المشتقة الاولى.

نظرية:

اذا كان f اقتراناً متصلاً على الفترة المغلقة [a,b] وقابلاً للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) فان:

أ- f يكون متزايداً على الفترة [a,b] اذا كانت $f'(x) > 0 , \forall x \in (a,b)$

ب- f يكون متناقص على الفترة [a,b] اذا كانت $f'(x) < 0, \forall x \in (a,b)$

نتيجة:

اذا كان f اقتراناً قابلاً للاشتقاق وكانت $f'(x_1) = 0$ أو غير معرفة فان $(x_1 , f(x_1))$ تسمى نقطة حرجة للاقتران (Critical Point).

مثال:

باستخدام المشتقة الاولى جد فترات التزايد والتناقص والنقاط الحرجة لكل من الاقترانات التالية:

a) $f(x) = 1 + 4x - x^2$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 13$

c) $f(x) = 4x^4 - 8x^2$

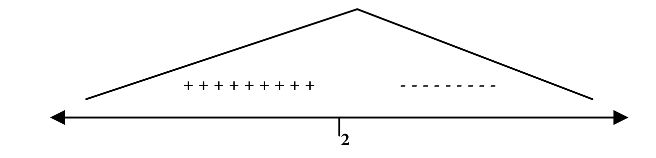
الحل:

a) $f(x) = 1 + 4x - x^2$

نجد في البداية المشتقة الاولى ونساويها بالصفر

$f'(x) = 4 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = 2$



∴ يكون الاقتران متزايد على الفترة $[-\infty , 2]$

ومتناقص على الفترة $[2 , \infty)$

أما النقطة الحرجة فهي $(2 ,5)$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 13$

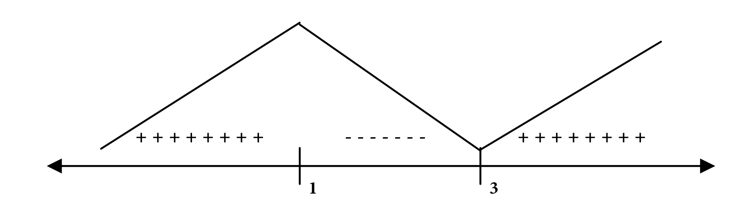
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0$

بالقسمة على (3)

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$\Rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 1 , x = 3$



∴ يكون الاقتران متزايد في الفترات $(-\infty , 1] \cup [3 , \infty)$

ومتناقص على الفترة $[1 , 3]$

أما النقاط الحرجة فهي $(1 , 17)$ $(3 , 13)$

c) $f(x) = 4x^4 - 8x^2$

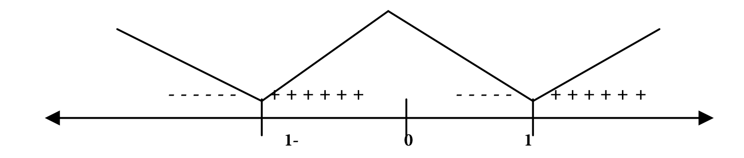
$f'(x) = 16x^3 - 16x$

بالقسمة على 16

$x^3 - x = 0$

$\Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow x = 0 , x = 1 , x = -1$



$\therefore$ يكون الاقتران متزايد على الفترات (∞ , 1] U [0 , 1-]

ومتناقص على الفترات [1- , ∞-) U [0 , 1]

أما النقاط الحرجة فهي (4- ,1-) , (4- , 1) , (0 , 0)

مثال:

جد النقاط الحرجة للاقتران $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$

الحل:

نجد المشتقة الاولى وتساويها بالصفر

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + \frac{(x)(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}$$

بالضرب التبادلي

$4 - x^2 = x^2$

$\therefore\ 2x^2 = 4$

$\Rightarrow x^2 = 2$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

$\therefore$ النقاط الحرجة هي

$$\left(-\sqrt{2}, f\left(-\sqrt{2}\right)\right), \left(\left(\sqrt{2}, f(\sqrt{2})\right)\right)$$

$$\left(-\sqrt{2},-2\right), \left(\sqrt{2},2\right)$$

القيم القصوى: Extrema Values

تعريف:

ليكن f(x) اقتران معرف على الفترة [a,b] فاذا وجدت فترة مفتوحة (c,d) تحوي x_1 فان:

أ- $f(x_1)$ تسمى قيمة عظمى محلية Local Maximum Value اذا كان

$$f(x_1) \geq f(x) \ , \ \forall \ x \in [a,b] \cap [c,d]$$

ب- $f(x_1)$ تسمى قيمة صغرى محلية Local Minimum Value اذا كان

$$f(x_1) \leq f(x) \ , \ \forall \ x \in [a,b] \cap [c,d]$$

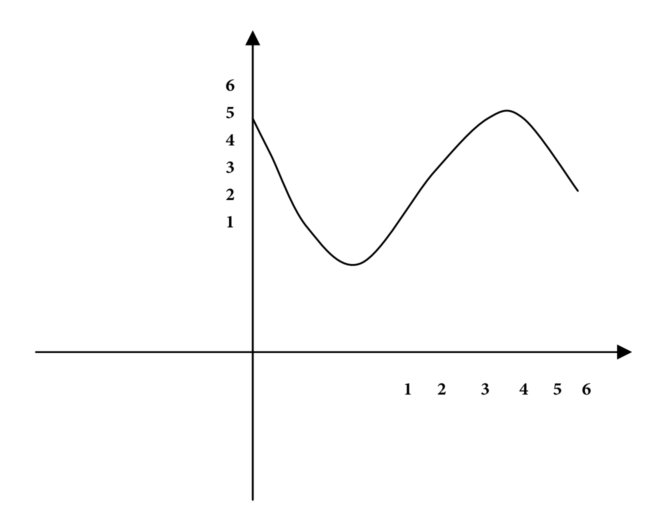
تسمى القيم العظمى والصغرى قيماً قصوى.

ملاحظة:

تكون القيمة القصوى مطلقة اذا كانت [c,d] = [a,b]

مثال:

الشكل التالي يمثل منحنى الاقتران f(x) في الفترة [0,6] حدد القيم القصوى للاقتران



الحل:

للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = 5$ وايضا عند $x = 4$ هي $f(4)=6$

ويوجد للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x = 1$ هي $f(1) = 1$ وايضاً عند $x = 6$ هي $f(6) = 3$

أما القيم القصوى المطلقة فهي $f(4) = 6$ فهي قيمة عظمى مطلقة

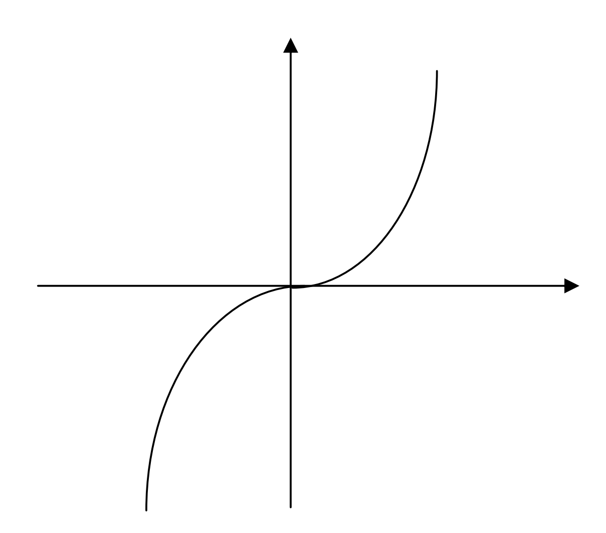
$f(2) = 1$ وهي قيمة صغرى مطلقة

مثال:

اذا كان $f(x) = x^3$ معرف على **R** فهل للاقتران قيم قصوى

الحل:

نرسم الاقتران ويكون شكله كالآتي:



نلاحظ من خلال الرسم أن الاقتران لا يحوي أي قيم قصوى

ملاحظة:

اذا كانت $f(x_1)$ قيمة قصوى فان $f'(x_1) = 0$ أو غير موجودة ولكن العكس ليس بالضرورة أن يكون صحيح.

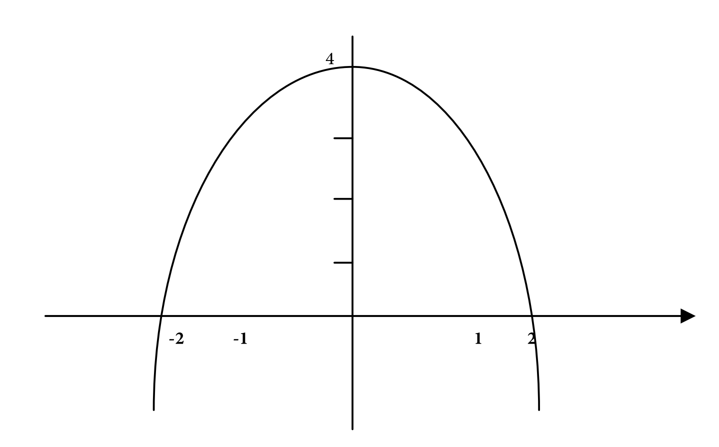
والمثال السابق دليل على عدم صحة عكس النظرية حيث $f'(0) = 0$ لكن لا يوجد قيمة قصوى عند $x = 0$

مثال:

جد القيم القصوى للاقتران $f(x) = 4 - x^2$

الحل:

نجد القيم القصوى من خلال الرسم



ونلاحظ أنه يوجد قيمة عظمى عند $x = 0$

هي $f(0) = 4$

وايضاً نلاحظ أن $f'(x) = 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$

أي $f'(0) = 0$

نظرية: (إختبار المشتقة الاولى)

اذا كان f اقتران متصل على الفترة [a,b] وقابل للاشتقاق على الفترة (a,b) وكانت $(x_1 , f(x_1))$ نقطة حرجة للاقتران f فان:

أ- $f(x_1)$ قيمة عظمى محلية اذا كان

$$f'(x_1) \geq 0 , \forall x \in (a , x_1) , f'(x_1) \leq 0 , \forall x \in (x_1 , b)$$

ب- $f(x_1)$ قيمة صغرى محلية اذا كانت

$$f'(x_1) \leq 0 , \forall x \in (a , x_1) , f'(x_1) \geq 0 , \forall x \in (x_1 , b)$$

وبشكل مبسط يكون للاقتران قيمة عظمى محلية عند x_1 اذا تغير الاقتران عندها من متزايد الى متناقص ويكون للاقتران قيمة صغرى محلية عند x_1 اذا تغير الاقتران عندها من متناقص الى متزايد.

مثال:

جد القيم القصوى للاقتران $f(x) = x^4 - 8x^2$

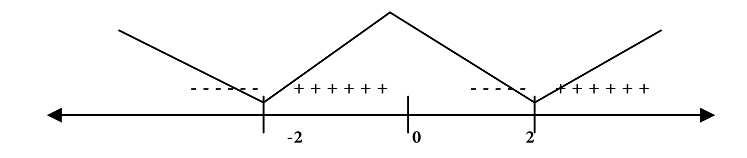
الحل:

نجد أولاً $f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$

$$\Rightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 , -2 , 2$$

ثم نحدد مجالات التزايد والتناقص للاقتران بالشكل الاتي:



نلاحظ أن الاقتران يتغير من متناقص الى متزايد عند $x = -2$

$\therefore$ يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = -2$ هي $f(-2) = -16$

وايضا يتغير الاقتران من متناقص الى متزايد عند $x = 2$

$\therefore$ يوجد قيمة صغرى محلية عند $x = 2$ هي $f(2) = -16$

ويتغير الاقتران من متزايد الى متناقص عند $x = 0$

وبالتالي يوجد قيمة عظمى محلية عند $x = 0$ هي $f(0) = 0$

مثال:

جد القيم القصوى للاقتران $f(x) = (x + 5)\ (x^2 - 4)$

الحل: نجد

$$f'(x) = (x^2 - 4) + (x + 5)(2x)$$

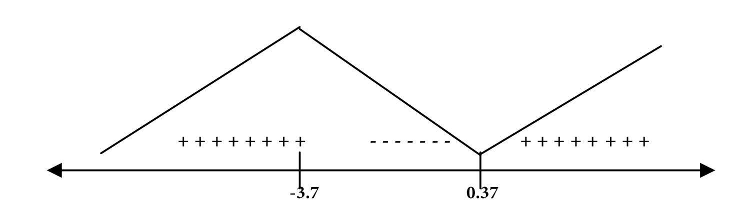
$$= x^2 - 4 + 2x^2 + 10x$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 + 10x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-10 \pm \sqrt{148}}{6} = \frac{-10 \pm 12.2}{6}$$

$$= 0.37\ ,\ -3.7$$

∴ مجالات التزايد والتناقص هي:



∴ يوجد للاقتران قيمة عظمى محلية عند $x = -3.7$ وهي $f(-3.7) = 9.69$

ويوجد للاقتران قيمة صغرى محلية عند $x = 0.37$ وهي $f(0.37) = -20.74$

نظرية: (إختبار المشتقة الثانية)

ليكن f اقتران متصل على الفترة [a,b] قابل للاشتقاق مرتين على الفترة (a,b) فاذا كـان $f'(x_1) =$ 0 حيث $x_1 \in (a,b)$ فإن :

أ- $f(x_1)$ قيمة صغرى محلية اذا كان $f''(x_1) > 0$

ب- $f(x_1)$ قيمة عظمى محلية اذا كان $f''(x_1) < 0$

مثال:

جد القيم العظمى والصغرى باستخدام اختبار المشتقة الثانية للاقتران

$f(x) = x^4 - 8x^2$

الحل:

نجد المشتقة الاولى أولاً ونساويها بالصفر لايجاد النقاط الحرجة .

$f'(x) = 4x^3 - 16x = 0$

$\Longrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0$

$\Longrightarrow x = 0 , -2 , 2$

نجد المشتقة الثانية ونعوض فيها بالقيم السابقة .

$f''(x) = 12x^2 - 16$

قيمة عظمى محلية $f''(0) = -16 < 0 \Longrightarrow f(0) = 0$

قيمة صغرى محلية $f''(-2) = 32 > 0 \Longrightarrow f(-2) = -16$

قيمة صغرى محلية $f''(2) = 32 > 0 \Longrightarrow f(2) = -16$

التقعر : Concavity

نظرية: اذا كان f متصل وقابل للاشتقاق مرتين على الفترة (a,b) فان:

1- f مقعر للاعلى Concure up على الفترة (a,b) اذا كان

$f''(x) > 0 , \forall x \in (a,b)$

2- f مقعر للاسفل Concure down على الفترة (a,b) اذا كان

$f''(x) < 0 , \forall x \in (a,b)$

ملاحظة:

تسمى النقطة $(x_1,f(x_1))$ نقطة انعطاف Inflection point اذا كانت $f(x_1)=0$ أو غير معرفة.

مثال:

جد مجالات التقعر لكل من الاقترانات التالية:

1- $f(x) = x^2 - 4x + 5$

2- $f(x) = x^3 - 12x^2 + 8x$

3- $f(x) = 2x^4 - 64x^2$

الحل:

1- $f'(x) = 2x - 4$

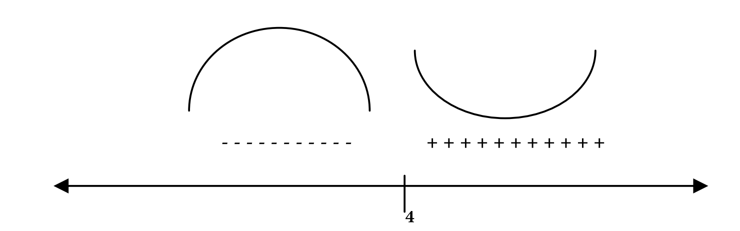
$f''(x) = 2$

''f موجبة على كل R وبالتالي يكون الاقتران مقعراً للاعلى فقط

2- $f'(x) = 3x^2 - 24x$

$f''(x) = 6x - 24 = 0$

$\Rightarrow x = 4$



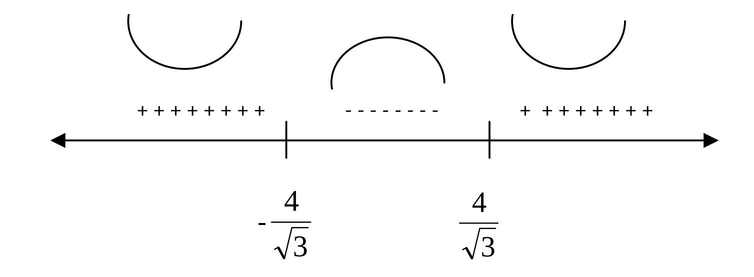
مقعر للاعلى على الفترة $(4 , \infty)$

ومقعر للاسفل على الفترة $(-\infty,4)$

3- $f'(x) = 8x^3 - 128x$

$f'(x) = 24x^2 - 128 = 0$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{128}{24} = \frac{16}{3} \Rightarrow X = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$



$$-\frac{4}{\sqrt{3}} \qquad \frac{4}{\sqrt{3}}$$

مقعر للاعلى على الفترة $\left(-\infty, \frac{-4}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, \infty\right)$

ومقعر للاسفل على الفترة $\left(\frac{-4}{\sqrt{3}}, \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

تطبيقات ادارية واقتصادية :

في البداية لنتعرف على المصطلحات والرموز والقوانين الخاصة لهذه التطبيقات ونجملها في الجدول التالي :

المصطلح باللغة العربية	المصطلح باللغة الانجليزية	الرمز	القانون
التكلفة الكلية	Total Cost	TC	
الايراد الكلي	Total Revenue	TR	$TR = PQ$ P: Price حيث السعر Q: quantity الكمية
الربح الكلي	Total profit	TP	$TP = TR - TC$
التكلفة الحدية	Morginal Cost	MC	$MC = \frac{dTC}{dQ}$
الايراد الحدي	Morginal Revenue	MR	$MR = \frac{dTR}{dQ}$
الربح الحدي	Morginal Profit	MP	$MP = \frac{dTP}{dQ}$ $MP = MR - MC$

مثال :

مصنع لالعاب الاطفال ينتج Q لعبة في اليوم بتكلفة مقدارها

$$TC = \frac{1}{2}Q^2 + 3Q - 20$$

وكان الايراد الكلي 9Q-6 دينار . اوجد عدد الالعاب التي يجب انتاجها حتى يكون ربحه أكبر ما يمكن.

الحل:

المطلوب ايجاد قيمة Q عند TP اكبر ما يمكن

$TP = TR - TC$

$TR = 9Q - 6$

$TC = \frac{1}{2} Q^2 + 3Q - 20$

$TP = (9Q - 6) - (\frac{1}{2} Q^2 + 3Q - 20)$

$= -\frac{1}{2} Q^2 + 6Q + 14$

لايجاد اكبر ربح نجد MP وتساويها بالصفر

$MP = \frac{dTP}{dQ} = -Q + 6 = 0$

$\Rightarrow Q = 6$

وهذه القيمة يجب أن تكون قيمة عظمى لذلك نطبق اختبار المشتقة الثانية.

$MP = -1 < 0$

$\therefore$ يوجد قيمة عظمى عند Q=6

ويكون اكبر ربح هو

$TP = -\frac{1}{2} (8)^2 + (6)(6) + 14$

$= -18 + 36 + 14$

$= 32$ JD

مثال:

اذا كانت دالة الطلب معطاة على الصورة

$P = Q^2 - 9Q + 96$

أوجد الايراد الحدي عند بيع الوحدة العاشرة.

الحل:

نجد في البداية الايراد الكلي

$$TR = P.Q = (Q^2 - 9Q + 96) . Q$$
$$= Q^3 - 9Q^2 + 96Q$$

ثم نجد الايراد الحدي

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$
$$= 3Q^2 - 18Q + 96$$

الايراد الحدي عند $Q = 10$

$$MR (10) = 3(10)^2 - 18 (10) + 96$$
$$= 300 - 180 + 96$$
$$= 216$$

مثال:

اذا كانت التكاليف الكلية لانتاج Q وحدة من سلعة معينة اسبوعياً معطى بالعلاقة

$$TC = 40 + 5Q + \frac{1}{4} Q^2$$

وكانت دالة الطلب هي

$$P = 60 - Q$$

أوجد الربح الحدي عند انتاج $(Q = 20)$ وحدة

الحل:

الربح الحدي

$$MP = MR - MC$$

الايراد الكلي

$$TR = P . Q = (60 - Q) . Q$$
$$= 60Q - Q^2$$

الايراد الحدي

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

$$= 60 - 2Q$$

التكلفة الكلية

$$TC = 40 + 5Q + \frac{1}{4}Q^2$$

التكلفة الحدية

$$MC = 5 + \frac{1}{2}Q$$

الربح الحدي:

$$MP = MR - MC$$

$$= (60 - 2Q) - (5 + \frac{1}{2}Q)$$

$$= 60 - 2Q - 5 - \frac{1}{2}Q$$

$$= 55 - 2.5Q$$

الربح الحدي عند $Q = 20$

$$MP(20) = 55 - (2.5)(20)$$

$$= 55 - 50$$

$$= 5 \text{ J.D}$$

مثال:

مصنع لتجميع الثلاجات يحتاج Q وحدة من انتاج معين للتشغيل في كل اسبوع فإذا كانت تكلفة عمل الطلبات السنوية تعطي بالعلاقة

$$TC = 800 + 4Q + \frac{6400}{Q}$$

ما هي الكمية المطلوبة اسبوعيا لكي تكون التكلفة السنوية اقل ما يمكن.

الحل:

لايجاد أقل كمية نجد التكلفة الحدية ونساويها بالصفر ونجد منها قيمة Q لتكون قيمة صغرى.

$$MC = 4 - \frac{6400}{Q^3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{6400}{Q^2} = 4$$

$$\Rightarrow 4Q^2 = 6400$$

$$\Rightarrow Q^2 = \frac{6400}{4} = 1600$$

$$\Rightarrow Q = \pm 40 = 40$$

تستثنى القيمة السالبة

$$(MC)' = + \frac{12800}{Q^3}$$

$$MC\ (40) = \frac{12800}{(40)^3} = 0.2 > 0$$

∴ قيمة صغرى عند $Q = 40$.

تمــارين

- جد النهايات للاسئلة (1-13)

1- $\lim_{x\to 7} x^4 - 5x^3 + 2x - 10$

2- $\lim_{x\to 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$

3- $\lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2}$

4- $\lim_{x\to 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$

5- $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

6- $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x+1} - 1\right)$

7- $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$

8- $\lim_{x\to 22} \frac{x - 22}{\sqrt[3]{x+5} - 3}$

9- $\lim_{x\to 2} \frac{x^4 - x^3 - 8}{x^3 - 3x^2 + 4}$

10- $f(x) = |2x - 3|$ at $x = \frac{3}{2}$

11- $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & x \neq 3 \\ 6 & x = 3 \end{cases}$ at $x = 3$

12- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & x > 3 \\ 5 - x & x < 3 \end{cases}$ at $x = 3$

13- $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \leq 0 \\ 1 - x & x > 0 \end{cases}$ at $x = 0$

- ابحث في اتصال الاقترانات للاسئلة (14-19)

14- $f(x) = \begin{cases} -x & x \leq 0 \\ x - 1 & x > 0 \end{cases}$

15- $f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & x < 2 \\ 8 & x = 2 \\ -2x + 12 & x > 0 \end{cases}$

16- f(x) = $|x - 3|$

17- f(x) = $\dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$

18- f(x) = $\begin{cases} \dfrac{x}{x-5} & x \neq 5 \\ 3 & x = 5 \end{cases}$

19- f(x) = $\dfrac{1}{2}\left(x + |x|\right)$

20- جد قيمة m التي تجعل f(x) متصلاً :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 4}{x} & x > 1 \\ m & x \leq 1 \end{cases}$$

21- احسب متوسط التغير للاقتران $f(x) = \dfrac{x^2}{3x - 1}$ في الفترة [-1, 0] .

22- جد ميل المستقيم الذي يقطع منحنى $f(x) = (7x - 3)\sqrt{x^2 + 2}$ عند x=1 وعند x=5 .

23- جد معادلة المماس للاقتران $f(x)=x^3 - 3x^2 + 4$ عند x=1 .

- باستخدام التعريف جد مشتقة الاقترانات للاسئلة (24-28)

24- $f(x) = 2x - 1$

25- $f(x) = 1 - x^2$

26- $f(x) = \sqrt{3x - 4}$

27- $f(x) = h(x) . l(x)$

28- $f(x) = \sqrt[3]{x}$

- جد $\frac{dy}{dx}$ للاسئلة (29-32)

29- $y = (2x^2 - 3x + 4)(x^2 - 4)$

30- $y = \frac{x+2}{x-1}$

31- $yx + y^3x = x^2$

32- $\frac{xy}{y^2 + x^2} = 6$

33- اذا كانت $m = 3n^3$, $m = x^2 - 3x + 5$ فجد $\frac{dn}{dx}$

- جد المشتقة الثانية والثالثة لكل من الاقترانات في الاسئلة (34-36)

34- $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 6x$

35- $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

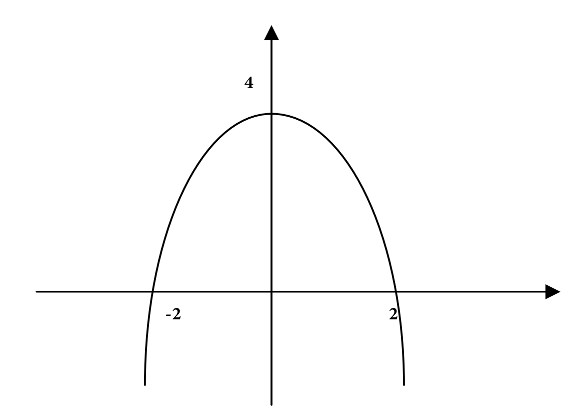
36- $y^2x + 2x^2 = y^3 \quad , \quad x = 1 , \; y = 1$

37- للاقتران $f(x) = 2x^3 - x^2 + 15$ $\frac{1}{2}$ جد

أ- فترات التزايد والتناقص

ب- القيم العظمى والصغرى

38- الشكل التالي يمثل منحنى $f'(x)$



جد :

أ- مجالات التزايد والتناقص

ب- القيم العظمى والصغرى

39- اذا كان للاقتران:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x + 12 & x \geq 2 \\ a & x < 2 \end{cases}$$

قيمة صغرى عند x=1 هي (9) فجد قيمة a

40- اذا كان للاقتران $f(x) = x - ax^2$ قيمة عظمى محلية عند $x = \frac{-1}{4}$

فجد قيمة a

41- اذا كان الدخل الكلي لبيع كمية من الرز بالطن معطى بالمعادلة

$$TR = \frac{Q^2}{20} + 15Q + 8$$

احسب الدخل الحدي الناتج عن بيع (50 طن)

42- اذا كانت دالة التكلفة الكلية هي:

$$TC = Q^3 - 4Q^2 + 75$$

أوجد كمية الانتاج اللازمة لتكون التكلفة اقل ما يمكن.

43- اذا كانت دالة الطلب معطاة بالعلاقة

$$P = 50 - 2Q$$

أوجد السعر الذي يعظم الايراد

44- اذا كانت دالة تكلفة انتاج Q وحدة من أجهزة الحاسوب معطاة بالعلاقة

$$TC = 5000 + 2Q \ \$$$

وكان سعر بيع الوحدة هو

$$P = 5 + \frac{300}{Q^2} \ \$$$

ما هي كمية الانتاج اللازمة لتعظيم الربح .

45- اذا كانت دالة الربح الكلي معطاة بالعلاقة

$$P(x) = -x^3 + 135x^2 - 2400x - 75000$$

أوجد :

1- الفترات التي يكون فيها الربح متزايد.
2- الفترات التي يكون فيها الربح متناقض.
3- الكمية اللازمة ليكون الربح اكبر ما يمكن.

46- مصنع ثلج ينتج شهرياً (x) وحدة من بضاعة معينة ويبيع الوحدة بمقدار y دينار، اذا كانت كلفة الانتاج لهذه الوحدات هي:

$(\frac{1}{5}x^2 + 17x + 500)$ دينار

وكانت العلاقة بين y , x هي: $5x = 381 - y$

أوجد كمية الانتاج اللازمة حتى يكون الربح اكبر ما يمكن.

الوحدة السادسة
التكامل

Integration

الوحدة السادسة
التكامل
Integration

التكامل غير المحدود وعكس المشتقة

Antiderivative and the indefinite integral

تعريف:

المعادلة على الصور $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ تسمى معادلة تفاضلية

مثال:

جد حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$

الحل:

في هذه المعادلة نقول ما هو الاقتران الذي مشتقة (2x) ومن معرفتنا بالتفاضل نستطيع أن نقول أن هذا الاقتران هو $f(x) = x^2$ ومشتقة هذا الاقتران تعطي حل المعادلة التفاضلة ولكن اذا كان هناك عدد ثابت مضافا إلى x^2 فإن المشتقة تكون أيضا 2x

مثلا $f(x) = x^2 + 1$ مشتقته 2x وأيضاً $f(x) = x^2 + 25$ مشتقة (2x)

$\therefore$ بشكل عام فإن $f(x) = x^2 + c$ حيث c عدد ثابت، هو حل المعادلة التفاضلية

تعريف:

إذا كان f اقترانا متصلاً على [a,b] فإن الاقتران F يدعى اقترانا بدائيا للاقتران f إذا كان

$F'(x) = f(x)\ ,\ \forall\ x \in (a,b)$

ويسمى الاقتران $F(x)$ تكامل للاقتران $f(x)$ بالنسبة للمتغير x وتكتب على الصورة

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c \quad , \quad c \in R$$

مثال:

جد الاقتران البدائي للاقتران $f(x) = 3x^2$

الحل:

من التعريف نقول أن $F'(x) = 3x^2$

$$\Rightarrow F(x) = \int 3x^2\,dx = x^3 + c$$

وجدنا الحل من خلال معرفتنا بمادة التفاضل وأن مشتقة x^3 هي $3x^2$ ومن هنا نرى أن التكامل هو عكس للمشتقة ويسمى هذا النوع من التكامل بالتكامل غير المحدود ولسهولة ايجاد التكامل نتعرف على القواعد التالية:

قواعد التكامل غير المحدود :

1) $\int k\,dx = kx + c \quad , \quad k \in R$

مثال:

1) $\int 5\,dx = 5x + c$

2) $\int \pi\,dx = \pi x + c$

2) $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad , \quad n \in R / \{-1\}$

مثال:

جد التكاملات التالية:

1) $\int x^2\,dx$

2) $\int x^5\,dx$

3) $\int \sqrt{x}\ dx$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\ dx$

الحل:

1) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$

2) $\int x^5\ dx = \frac{x^6}{6} + c$

3) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

4) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = \int x^{\frac{-3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{-1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + c = \frac{-2}{\sqrt{x}} + c$

3) $\int k\ f(x)\ dx = k \int f(x)\ dx\ ,\ \ k \in R$

مثال:

جد التكاملات التالية:

1) $\int 3x^2\ dx$

2) $\int 5x^{-6}\ dx$

الحل:

1) $\int 3x^2 dx = (3)\left(\frac{x^3}{3}\right) + c = x^3 + c$

2) $\int 5x^{-6}dx = \frac{5x^{-5}}{-5} + c = \frac{-1}{x^5} + c$

4) $\int f(x) \pm h(x)dx = \int f(x)dx \pm \int h(x)dx$

مثال:

جد التكاملات التالية:

1) $\int 3x^2 + 2x + 5dx$

2) $\int \frac{3}{\sqrt{x}}dx$

3) $\int \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 1dx$

الحل:

1) $\int 3x^2 + 2x + 5dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 5x + c$

$= x^3 + x^2 + 5x + c$

2) $\int \frac{3}{\sqrt{x}}dx = \int 3(x)^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 6\sqrt{x} + c$

3) $\int \frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2} + 1dx = \int 4x^{-3} + 3x^{-2} + 1dx$

$= \frac{4x^{-2}}{-2} + \frac{3x^{-1}}{-1} + x + c$

$= -2x^{-2} - 3x^{-1} + x + c$

$$= \frac{-2}{x^2} - \frac{3}{x} + c$$

التكامل بالتعويض: Integration by Substitution

بعض التكاملات لا يمكن اجراءها مباشرة حيث يجب أن نحولها إلى صيغة اسهل لنتمكن من إجراء التكامل وذلك عن طريق التعويض.

مثال: جد

الحل: نفرض $\int 2x\,(x^2+1)^3\,dx$

$$y = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\therefore \int 2x(x^2+1)^3\,dx = \int 2xy^3\,\frac{dy}{2x} = \int y^3 dy$$

$$= \frac{y^4}{4} + c = \frac{1}{4}(x^2+1)^4 + c$$

مثال : جد

$$\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}\,dx$$

الحل:

$$y = x^2 - 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$$\therefore \int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt[3]{y}}.\frac{dy}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{3}}\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}y^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(x^2-4\right)^2} + c$$

مثال:

جد

$$\int (2x-2)\sqrt{3x^2-6x+10}\, dx$$

الحل:

$$y = 3x^2 - 6x + 10 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x - 6 = 3(2x-2)$$

$$\Rightarrow dx = \frac{dy}{3(2x-2)}$$

$$\therefore \int (2x-2)\sqrt{3x^2-6x+10}\, dx$$

$$= \int (2x-2)\frac{\sqrt{y}dy}{3(2x-2)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \sqrt{y}dy = \frac{1}{3}\int (y)^{\frac{1}{2}}\ dy$$

$$= \frac{1}{3}\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{2}{9}y^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{9}\left(3x -^{2} 6x + 10\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

التكامل المحدود : The definite integral

تعريف:

إذا كان $f : [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ اقترانا محدوداً فإن:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to 0}\frac{b-a}{n}\sum_{r=0}^{n} f(x_r)$$

ويكون الاقتران قابل للتكامل إذا كانت النهاية موجودة.

نلاحظ من خلال تعريفنا للتكامل المحدود أن تكامل الاقتران f(x) من x = a الى x=b يعطي نفس تعريف المساحة المحصورة بين الاقتران ومحور x-axis والمستقيمين x = b , x = a .

مثال: جد

$$\int_a^b cdx \quad , \quad c \in R$$

الحل:

$$\int_a^b cdx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} c$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \times cn$$

$$= (b-a)\,c$$

مثال: جد

$$\int_a^b xdx$$

الحل:

$$\int_a^b xdx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} x_r$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} a + \frac{b-a}{n} r$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \left[an + \frac{b-a}{n} . \frac{n(n+1)}{2} \right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} (b-a)a + (b-a)^2 \frac{(n+1)}{2n}$$

$$= (b-a)\,a + \frac{(b-a)^2}{2}$$

$$= (b-a) \left(a + \frac{b-a}{2} \right)$$

$$= (b - a)\left(\frac{b+a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,(b^2 - a^2)$$

نظرية:

إذا كان f اقتران معرف على [a, b] بحيث $f(x) = x^n$, $n \in N$ فإن:

$$\int_a^b x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big]_a^b$$

$$= \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

مثال:

جد التكاملات التالية:

1) $\int_0^1 x^2 dx$

2) $\int_2^4 x^5 dx$

الحل:

1) $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

2) $\int_2^4 x^5 dx = \frac{x^6}{6}\Big]_2^4 = \frac{4^6 - 2^6}{6} = 2^6\,\frac{\left(2^6 - 1\right)}{6}$

$$= \frac{64 \times 63}{6} = 672$$

خواص التكامل المحدود:

$$\text{1)} \quad \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad , \quad c \in R$$

مثال: جد

$$\int_0^2 4x^3 dx$$

الحل:

$$\int_0^2 4x^3 dx = \frac{4x^4}{4}\Big]_0^2 = 2^4 - 0^4 = 16$$

$$\text{2)} \quad \int_a^b \left(f(x) \pm h(x)\right)dx = \int_a^b \left(f(x)dx\right) \pm \int_a^b \left(h(x)dx\right)$$

مثال: جد

$$\int_1^2 3x^2 - 2x + 4dx$$

الحل:

$$\int_1^2 3x^2 - 2x + 4dx = \frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x\Big]_1^2$$

$$= x^3 - x^2 + 4x\Big]_1^2$$

$= (2^3 - 2^2 + (4)(2)) - (1^3 - 1^2 + (4)(1))$

$= 12 - 4 = 8$

$$3)\quad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

تسمى هذه الخاصية خاصية الاضافة

مثال: جد

$$\int_{-1}^{1} |2x - 1| dx$$

الحل: نعيد تعريف القيمة المطلقة

$$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1 & x > \frac{1}{2} \\ -(2x - 1) & x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^{1} |2x - 1| dx = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} 1 - 2x dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2x - 1 dx$$

$$= x - x^2 \Big]_{-1}^{\frac{1}{2}} + \left[x^2 - x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) - \left((-1) - (-1)^2\right)\right] + \left[\left(1^3 - 1\right) - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right)\right]$$

$$= \left(\frac{1}{4} + 2\right) + \left(\frac{3}{4}\right)$$

$= 3$

$$4) \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

مثال:

$$\int_2^2 \sqrt{x} + \frac{5}{x} dx = 0$$

$$5) \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

أمثلة على التكامل المحدود:

مثال: جد

$$\int_1^4 x + \sqrt{x} dx$$

الحل:

$$\int_1^4 x + \sqrt{x} dx = \int_1^4 x + x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left. \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^4$$

$$= \left(\frac{4^2}{2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{2}{3}\left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}} \right)$$

$$= \left(8 - \frac{1}{2} \right) + \frac{2}{3}(8 - 1)$$

$$= 8 - \frac{1}{2} + \frac{14}{3}$$

$$= \frac{73}{6}$$

مثال : جد

$$\int_0^2 x(x^2-4)^3 dx$$

الحل:

نكامل بالتعويض حيث نفرض $y = x^2 - 4$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dy}{2x}$$

$x = 2 \Rightarrow y = 0$

$x = 0 \Rightarrow y = -4$

$$\therefore \int_0^2 x(x^2-4)^3 dx = \int_{-4}^0 xy^3 \frac{dy}{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-4}^0 y^3 dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}\right]_{-4}^0 = \frac{1}{2}\left[0 - \frac{(-4)^4}{4}\right]$$

$$= -32$$

مثال :

$$\int_1^2 \frac{(x-1)^5}{x^7}\,dx$$

الحل: نبسط المقدار

$$\frac{(x-1)^5}{x^7}$$

$$\frac{(x-1)^5}{x^7} = \frac{(x+1)^5}{x^5} \times \frac{1}{x^2}$$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)^5 . \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore \int_1^2 \frac{(x+1)^5}{x^7} dx = \int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)^5 . \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$y = 1+\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x^2} \Rightarrow dx = -x^2 dy$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 2$$

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

$$\int_1^2 \left(1+\frac{1}{x}\right)^5 . \frac{1}{x^2}\,dx = \int_2^{\frac{3}{2}} y^5 . \frac{1}{x^2} - x^2 dy$$

$$= - \int_2^{\frac{3}{2}} y^5 dy$$

$$= \int_{\frac{3}{2}}^{2} y^5 dy$$

$$= \left.\frac{y^6}{6}\right]_{\frac{3}{2}}^{2} = \frac{2^6}{6} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^6}{6}$$

$= 8.769$

مشتقة وتكامل الاقترانات اللوغارتمية والأسيه:

Derivative and integration of logarithmic and exponential function:

مشتقة وتكامل الاقترانات اللوغارتميه:

$$1- \frac{d}{dx}\left[\log_a x\right] = \frac{1}{x \ln a} \quad , \quad x > 0$$

$$2- \frac{d}{dx}\left[\ln x\right] = \frac{1}{x} \quad , \quad x > 0$$

$$3- \frac{d}{dx}\left[\log_a u\right] = \frac{1}{u \ln a} . \frac{du}{dx}$$

$$4- \frac{d}{dx}\left[\ln u\right] = \frac{u'}{u}$$

مثال:

جد مشتقة كل من الاقترانات التالية:

$1- y = \log_2 x$

$2- y = \log_5 \left(x^3 - 3x + 1\right)$

الحل:

$$1-\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln 2}$$

$$2-\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-3}{(x^3-3x+1)\ln 5}$$

مثال:

استخدم اللوغارتمات في ايجاد مشتقة الاقتران:

$$y=\frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}$$

الحل:

نأخذ اللوغارتم للطرفين

$$\ln y=\ln\left(\frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)^4}\right)$$

$$=\ln x^2(7x-14)^{\frac{1}{3}}-\ln(1+x^2)^4$$

$$\ln y=2\ln x+\frac{1}{3}\ln(7x-14)-4\ln(1+x^2)$$

نشتق الطرفين

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{x} + \frac{1}{3}\frac{7}{7x-14} - 4\frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \frac{2}{x} + \frac{1}{3x-6} - \frac{8x}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{3x-6} - \frac{8x}{1+x2}\right)y$$

$$= \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{3x-6} - \frac{8x}{1+x2}\right)\left(\frac{x^2\sqrt[3]{7x-14}}{(1+x^2)4}\right)$$

تكامل الاقترانات اللوغارتمية:

$$5 - \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$$

مثال:

جد التكاملات التالية:

$$1 - \int_1^e \frac{1}{x} dx$$

$$2 - \int \frac{x^2}{x^3+1} dx$$

الحل:

$$1 - \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$$

$$2 - \int \frac{x^2}{x^3+1} dx$$

نستخدم التكامل بالتعويض:

$$u = x^3 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3x^2 \Rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{x^2}{u} \cdot \frac{du}{3x^2} = \tfrac{1}{3} \int \frac{1}{u} du$$

$$= \tfrac{1}{3} \ln u + c = \tfrac{1}{3} \ln\left(x^3 + 1\right) + c$$

$$= \ln \sqrt[3]{x^3 + 1} + c$$

مشتقة وتكامل الاقترانات الأسيه:

$$1 - \frac{d}{dx}\left[a^x\right] = a^x \ln a$$

$$2 - \frac{d}{dx}\left[e^x\right] = e^x$$

$$3 - \frac{d}{dx}\left[a^u\right] = a^u \ln a . \frac{du}{dx}$$

$$4 - \frac{d}{dx}\left[e^u\right] = e^u . \frac{du}{dx}$$

$$5 - \int a^u du = \frac{a^u}{\ln u} + c$$

$$6 - \int e^u du = e^u + c.$$

مثال:

جد مشتقة الاقترانات التالية:

$$1 - y = 3^x$$

$$2 - y = 4^{x^2 - 1}$$

$$3 - y = e^{6x^2}$$

الحل:

$$1- \frac{dy}{dx} = 3^x \ln 3$$

$$2- \frac{dy}{dx} = (2x)\left(4^{x^2-1}\right)\ln 4$$

$$3- \frac{dy}{dx} = 12xe^{6x^2}$$

مثال:

جد التكاملات التالية:

$$1- \int e^x dx$$

$$2- \int 2^{5x} dx$$

$$3- \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$4- \int_0^{\ln 3} e^x \sqrt{1+e^x} dx$$

الحل:

$$1- \int e^x dx = e^x + c$$

$$2- \int 2^{5x} dx = \frac{1}{5} \cdot \frac{2^{5x}}{\ln 2} + c$$

$$3- \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \ dx$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2\sqrt{x} du = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{e^u}{\sqrt{x}}.2\sqrt{x}du = 2\int e^u du$$
$$= 2e^u + c$$
$$= 2e^{\sqrt{x}} + c$$

$$4- \int_0^{\ln 3} e^x \sqrt{1+e^x dx}$$
$$u = 1+e^x \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow dx = \frac{du}{e^x}$$
$$x = 0 \rightarrow u = 1+e^0 = 2$$
$$x = \ln 3 \rightarrow u = 1+e^{\ln 3} = 4$$
$$\therefore \int_0^{\ln 3} e^x \sqrt{1+e^x} dx = \int_2^4 e^x \sqrt{u} \frac{du}{e^x}$$
$$= \int_2^4 u^{1/2} du$$
$$= \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big]_2^4 = \frac{2}{3}\left[\sqrt{4^3} - \sqrt{2^3}\right]$$
$$= \frac{2}{3}\left[8 - \sqrt{8}\right]$$

المساحة: Area

1- المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور x – axis

تعرف المساحة المحصورة بين منحنى الاقتران f(x) ومحور x – axis والمحددة بالمستقيمات x = b , x = a عن طريق التكامل كالآتي:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

لكن في بعض الحالات تكون قيمة التكامل بالسالب والمساحة لا يمكن أن تكون بالسالب ومن أجل تحويل القيمة السالبة إلى موجبة نأخذ القيمة المطلقة.

$$\therefore A = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$$

مثال :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران $f(x) = 4x-1$ والمحددة بالمستقيمين $x = 1$, $x = 3$.

الحل:

$$A = \left| \int_1^3 4x - 1dx \right|$$

$$= \left| 2x^2 - x \right|_1^3$$

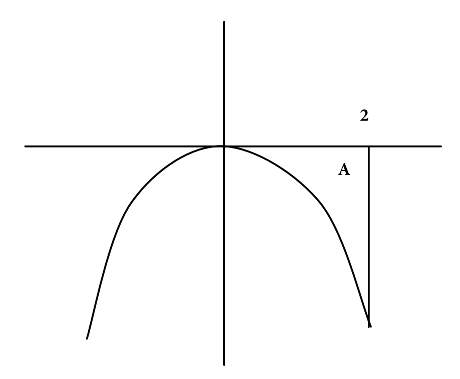
$$= |(2)(3)^2-3)-(2(1)^2-1)|$$

$$= |15-1| = 14 \text{ u.a}$$

مثال :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = -x^2$ ومحور x-axis ومحددة بالمستقيمات $x = 2$, $x = 0$.

الحل:



$$A = \left| \int_0^2 -x^2 dx \right|$$

$$= \frac{-x^3}{3} \Big]_0^2$$

$$= \left| \frac{-(2)^3}{3} - \frac{-(0)^3}{3} \right|$$

$$= \left| \frac{-8}{3} \right| = \frac{8}{3} \text{ u.a}$$

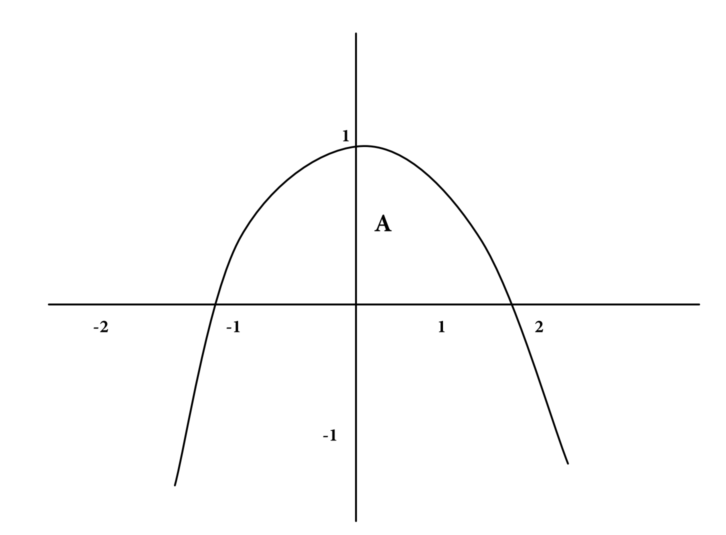
مثال:

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = 1 - x^2$ ومحور x-axis

الحل:

نجد في البداية حدود التكامل وذلك بمساواة الاقتران بالصفر.

$$\therefore\ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$



$$\therefore A = \left| \int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx \right|$$

$$= \left| x - \frac{x^3}{3} \right|_{-1}^{1}$$

$$= \left| \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right|$$

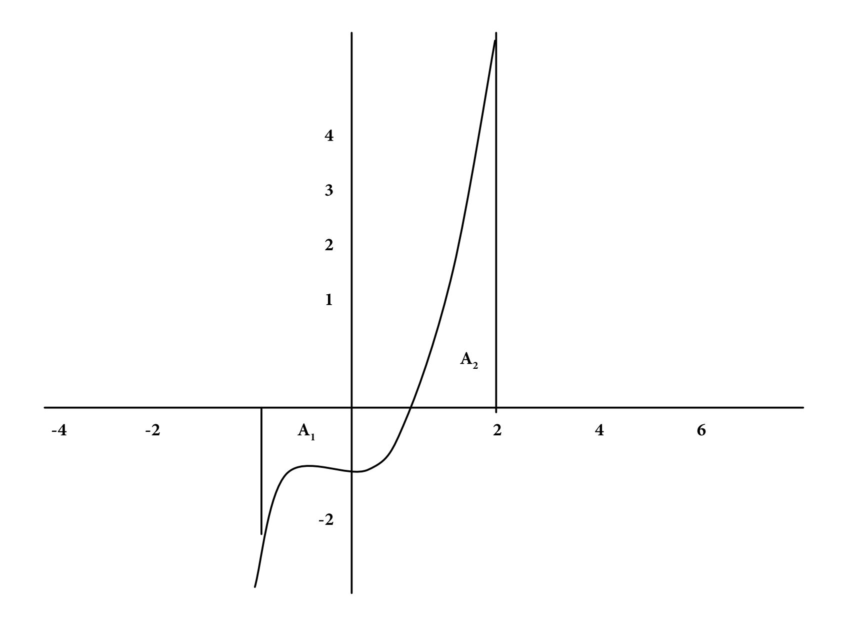
$$= \left| \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right| = \frac{4}{3} \text{ u.a}$$

مثال :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = x^3-1$ والمحدد بالمستقيمين $x = -1 , x = 2$

الحل:

من خلال الرسم نلاحظ أن المساحة المطلوبة تنقسم إلى قسمين حيث يقع جزء في السالب وجزء في الموجب وبالتالي إذا أوجدنا المساحة المباشرة لن تعبر عن المساحة الحقيقية ولذلك لابد في هذه الحالة من تقسيم المساحة إلى مساحتين.



$$\therefore A = \left|\int_{-1}^{1}(x^3 - 1)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3 - 1)dx\right|$$

$$= \left|\frac{x^4}{4} - x\right|_{-1}^{1} + \left|\frac{x^4}{4} - x\right|_{1}^{2}$$

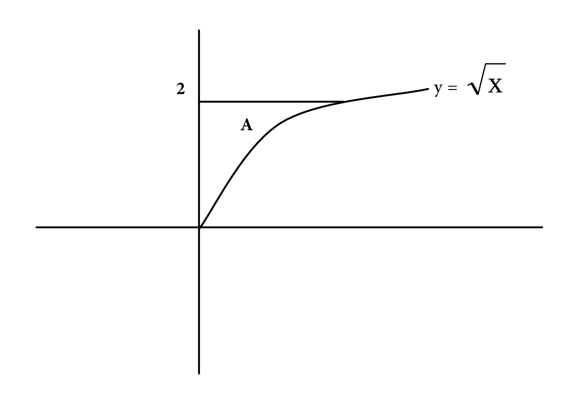
$$= \left|\left(\frac{1}{4} - 1\right) - \left(\frac{1}{4} + 1\right)\right| + \left|\left(\frac{2^4}{4} - 2\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)\right|$$

$$= |-2| + \left|2 + \frac{3}{4}\right|$$

$= 4.75$ u.a

مثال :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y = \sqrt{x}$ ومحور y – axis ومحددة بالمستقيمات y = 0 , y = 2



الحل:

نجد هنا التكامل بالنسبة للمتغير y حيث:

$$A = \left| \int_{y_1}^{y_2} f(y)dy \right|$$

لذلك نحول الاقتران بدلالة المتغير y

$$y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$$

$$\therefore A = \left| \int_0^2 y^2 dy \right|$$

$$= \left. \frac{y^3}{3} \right]_0^2$$

$$= \left| \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right| = \frac{8}{3} \text{ u.a}$$

2- المساحة المحصورة بين منحنيين

اذا كان $f(x)$, $h(x)$ اقترانيين قابلين للتكامل على الفترة $[a,b]$ فإن المساحة المحصورة بين منحنيـي $f(x)$, $h(x)$ والمحددة بالمستقيمان $x=a$, $x=b$ هي:

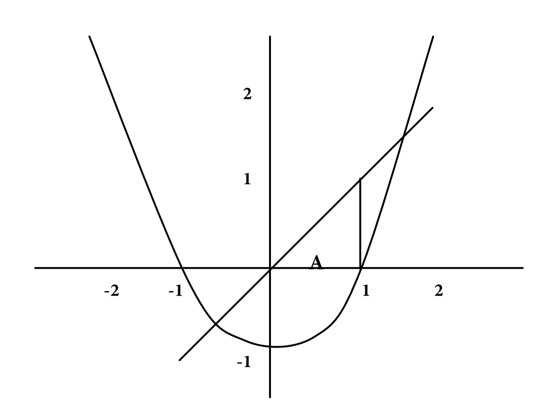
$$A = \left| \int_a^b (f(x) - h(x)dx \right|$$

مثال:

جد المساحة المحصورة بين منحنيي $f(x) = x^2 - 1$ ، $h(x) = x$ والمحدد بالمستقيمان $x = 0$, $x = 1$.

الحل

نرسم الاقترانين لتحديد المسافة المطلوبة (A)



$$A = \left| \int_0^1 h(x) - f(x)dx \right|$$

$$= \left| \int_0^1 x - \left(x^2 - 1\right)dx \right|$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \Big]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1\right) - 0$$

$$\therefore A = \frac{7}{6} \text{ u.a}$$

مثال :

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $y_1 = \frac{1}{8}x^3$ ومنحنى

$$y_2 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x$$

الحل:

لايجاد حدود التكامل نساوي الاقترانيين ببعضهما $y_1 = y_2$

$$\frac{1}{8}x^3 = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x$$

$$\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x = 0$$

نضرب المعادلة في 8-

$$-x^3 + 2x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$\Longrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$\Longrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$$

$\Rightarrow x(x-1)(x+2)=0$

$\Rightarrow x = -2 , 0 , 1$

∴ سيكون هناك منطقتان

$$\therefore A = \left|\int_{-2}^{0}\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}xdx\right| + \left|\int_{0}^{1}\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}xdx\right|$$

$$= \left|\int_{-2}^{0}-\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}xdx\right| + \left|\int_{0}^{1}-\frac{1}{8}x^3-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}xdx\right|$$

$$= \left|\frac{-x^4}{32}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^2}{8}\right|_{-2}^{0} + \left|-\frac{x^4}{32}-\frac{x^3}{24}+\frac{x^2}{8}\right|_{0}^{1}$$

$$= \left|0-\left(\frac{-16}{32}+\frac{8}{24}+\frac{4}{8}\right)\right| + \left|\left(\frac{-1}{32}-\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right)-0\right|$$

$$= \left|\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{5}{96}\right|$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{5}{96}=\frac{37}{96} \text{ u.a}$$

تطبيقات ادارية واقتصادية :

مثال:

اذا كان الايراد الحدي بالدينار لأحد منتجات مصنع ما هي:

$MR = 2000 + 0.2Q$

ما هو التغير في الايراد الكلي عندما تزاد المبيعات من 10 إلى 20 وحدة

الحل:

$$TR = \int_{a}^{b} (MR)\, dQ$$

$$= \int_{10}^{20} 200 + 0.2Q\, dQ$$

$$= 200Q + 0.1\, Q^2 \Big]_{10}^{20}$$

$$= (200)\,(20) + (0.1)\,(20)^2\,) - (\,(200)\,(10) + (0.1)\,(10)^2)$$

$$= 4000 + 40\ \ - 2000 - 10$$

$$= 2030 \text{ J.D}$$

أي يزداد الايراد بمقدار (2030) دينار اذا زادت المبيعات من 10 إلى 20 وحدة.

مثال:

اذا كانت التكلفة الحدية لاحد منتجات مصنع ما هي:

$$M = \frac{90000}{\sqrt{Q+1}}$$

فما هي التكلفة الكلية لانتاج 3 وحدات

الحل:

$$TC = \int_{a}^{b} (MC)dQ$$

$$TC = \int_{0}^{3} \frac{90000}{\sqrt{Q+1}} dQ$$

$$= \int_{0}^{3} 90000(Q+1)^{\frac{-1}{2}} dQ$$

$$= 90000 \int_{0}^{3} (Q+1)^{\frac{-1}{2}} dQ$$

$$= 90000 \left[2(Q+1)^{\frac{1}{2}} \right]_{0}^{3}$$

$$= 90000 [4 - 2)$$

$$= 180000 \text{ JD}$$

يعرف فائض المنتج Producer's surplus

$$\textbf{PS} = \int_{0}^{qe} [Pe - s(q)]dq$$

حيث

$P = S(q)$ اقتران العرض

(qe , Pe) تمثل نقطة التوازن بين العرض والطلب

مثال:

اذا كان اقتران العرض معرف كالآتي:

$S(q) = 0.0099\ q^2$

ودالة الطلب معرفة

$d(q) = 30 - 0.003\ q^2$

فجد فائض المنتج

الحل:

نجد نقطة التوازن بمسارات الطلب بالعرض

$S(q) = d(q)$

$0.009\ q^2 = 30 - 0.003q^2$

$\Rightarrow\ 0.012q^2 = 30$

$\Rightarrow\ q^2 = \dfrac{30}{0.012} = 2500 \ \Rightarrow\ qe = 50$

$Pe = S(qe) = S(50) = 0.009\ (50)^2 = 22.5$

$$\Rightarrow\ Ps = \int_0^{50} \left[22.5 - 0.009q^2\right] c$$

$$= 22.5q - 0.003q^3 \Big]_0^{50}$$

$$= 750\ \text{JD}$$

فائض المستهلك Consumer's Surplus

اذا كانت السعر $P=d(q)$ حيث $d(q)$ اقتران الطلب وكانت نقطة التوازن هي (qe,Pe) فإن فائض المستـهلك هو

$$CS = \int_{0}^{qe} [d(q) - Pe]\, dq$$

مثال :

لنفس المثال السابق جد فائض المستهلك

$$CS = \int_{0}^{50} [30 - 0.003q^{2} - 22.5)\, dq$$

$$= \int_{0}^{50} 7.5 - 0.003q^{2}\, dq$$

$$= 7.5q - 0.001q^{3} \Big]_{0}^{50}$$

$$= (7.5)\,(50) - (0.001)\,(5)^{3}$$

$$= 250 \text{ JD}$$

تمـــارين

- جد التكاملات للاسئلة (1-8)

1- $\int x + 5dx$

2- $\int 5x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 2x + 12dx$

3- $\int \frac{1}{x^2} dx$

4- $\int \frac{x^7 + x^5}{x^3} dx$

5- $\int_0^1 x^2 dx$

6- $\int_1^2 2x^2 + x + 5dx$

7- $\int_0^1 (x+1)^3 dx$

8- $\int_1^4 \frac{1}{x^2} dx$

- جد المساحة تحت منحنى كل من الاقترانات في الاسئلة (9-11) والمستقيمات المناظرة لكل منها:

9- $f(x) = 2x + 1$ $\quad x = 1 , x = 3$

10- $f(x) = x^2$ $\quad x = 0 , x = 2$

11- $f(x) = 3 - x^3$ $\quad x = 1 , x = 5$

- باستخدام التكامل بالتعويض جد التكاملات في الاسئلة (12-14)

12- $\int x^2 (x^3 + 5)^2 \, dx$

13- $\int_1^2 \frac{2x-6}{\sqrt{-x^2+6x+12}} \, dx$

14- $\int x^2 \sqrt{1+x} \, dx$

15- اذا كان f كثير حدود من الدرجة الثالثة وكان المشتقة الثانية له $f(x)=2x+1$ والنقطة (0,2) نقطة حرجة له، فما هي قاعدة الاقتران f .

16- اذا كان $\int_1^8 5f(x)dx = 25$, $\int_1^4 f(x)dx = 8$ فجد

$$\int_4^8 (3x^2 - 6f(x))dx$$

17- اذا كان $\int_0^8 f(x)dx = 12$ فجد $\int_0^2 2x^2 f(x^3)dx$

18- جد كثير الحدود f(x) من الدرجة الأولى في (x) بحيث:

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = 4, \int_1^3 f(x)dx = 2$$

- جد $\frac{dy}{dx}$ للاسئلة (19-23)

19- $y = (\ln x)^2$

20- $y = \ln \left(\frac{x}{1+x^2} \right)$

21- $y = x [\log_2 (x^2 - 2x)]^3$

22- $y = \frac{e^x}{\ln x}$

23- $y = \ln(\ln x)$

- استخدام اللوغارتمات في ايجاد مشتقة كل من الاقترانات في الاسئلة (24-25)

24- $y = x\sqrt[3]{2+5x^2}$

25- $y = \frac{(x+8)^{\frac{2}{3}}\sqrt{x^3+1}}{x^4-5x+4}$

- جد التكاملات في الاسئلة (26-30)

26- $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

27- $\int_{1}^{\sqrt{2}} xe^{-x^2}\,dx$

28- $\int \frac{x^2}{x^3+1}\,dx$

29- $\int_{1}^{10} \frac{\log\sqrt{10}}{\sqrt{x}}\,dx$

30- $\int \frac{e^x+1}{e^x+x+5}\,dx$

- جد المساحة المحصورة بين منحنى f(x) ومحور X والمستقيمان x = a , x=b في كل من الاقترانات للاسـئلة (31-32)

31- $f(x) = x^3$ $\quad x = -1 , x = 1$

32- $f(x) = x^3 - 4x + 12$ $\quad x = 1 , x = 3$

- جد المساحة المحصورة بين منحنى f(x) ومحور x للاسئلة (33-35)

33- $y = x^2 - 9$

34- $y + x^2 = 1$

35- $y = x^2 - 5x + 6$

- جد المساحة المحصورة بين منحنى f(x) ومحور y للاسئلة (36-38)

36- $x - y - 2 = 0$ ومحور x

37- $x = 4y - y^3$

38- $y = x\sqrt{4 - x^2}$ $y = 0$, $y = 1$

- جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات في الاسئلة (39-40)

39- $y = 1 - x^2$, $y = x - 1$

40- $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 2$

41- اذا كانت التكلفة الحدية لانتاج نوع من السلع عند مستوى الانتاج Q هـي $MC=10+0.2Q$. أوجـد التكلفة الكلية عند انتاج 120 وحدة .

42- اذا كان الايراد الحدي معطى بالعلاقة

$MR = 500 - 0.4Q$

جد الايراد الكلي اذا زادت المبيعات من 100 إلى 400 وحدة .

43- اذا كانت دالة العرض $P = S(q)$ معطى بالعلاقة $S(q) = 5 + \sqrt{q}$ أوجد فائض الانتاج عند $qe = 16$.

44- اذا كانت دالة الطلب $P= d(q) = 20 - 0.5Q$ أوجد فائض المستهلك عند $qe=10$.

ملحق

إجابات بعض الأسئلة الفردية

الوحدة الأولى:

1) { 11, 15, 17 }   3) { 20 }   5) { $x \in U : x$ عدد زوجي }

7) { -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 }

9) { -10, -8, -6, -4, -2, 0 }   11) A   13) ϕ

15) (2 , 3]   17) (1 , 3]   19) (3 , 4)

21) 4 , 7 , 3.64   23) ∞ , ∞ , 1.55

29) $4x^4 + 8x^3 + 10x^2 + 20x + 41$ (الباقي 82)

31) $\dfrac{x^3 + 2x^2 + 3x - 1}{(x^2 + 1)(3x + 2)}$ 33) $\dfrac{6x^2 + 2x - 20}{4x^2 + 9x + 2}$

35) 4^{-x} 37) $\dfrac{110}{9}$ 39) 10

41) -2   43) 1   45) 3

47) 34.5245   49) 0.2793

الوحدة الثانية:

1) 2   3) 5.5   5) 2

7) ± 4 9) $\pm\sqrt{7}$ 11) لا يوجد حل للنظام

13) 1 , 1 , 2   15) 1 , 4   17) [-1 , 3]

19) $\left[-1,\frac{1}{2}\right)\cup[4,\infty)$ 21) a) ϕ , b) (3 , 5]

23) 70 , 10

الوحدة الثالثة :

1) 6 حسابية 3) $\frac{1}{3}$ هندسية 5) 8n – 5

7) x + n – 2 9) 7^n 11) $\frac{5^{n-1}}{2^{n-3}}$, 648.375

13) 4, 16, 64, 256 15) 2450 17) 130 قرش

19) 1048575 21) 2 23) 797160

25) 1.984 27) 4800 29) 9%

الوحدة الرابعة :

1) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ 3) $\begin{bmatrix} 16 & 28 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$ 5) $\begin{bmatrix} 26 & 30 \\ 25 & 31 \end{bmatrix}$

7) 3 , ± 3 9) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 11) $\begin{bmatrix} -5 & 3 & 2 \\ -30 & 18 & 11 \\ 22 & -13 & -8 \end{bmatrix}$

13) لا يوجد لها معكوس 15) 1 , 1 , 1 17) لا يوجد حل للنظام

19) 322 21) 1 23) 0

25) -1155 27) -35 29) $\frac{-3}{8}$

31) $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2.5 & -1.5 \end{bmatrix}$ 33) $\begin{bmatrix} -2.5 & -1 & 3 \\ 3.5 & 2 & -5 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 35) $\frac{-4}{3}, \frac{38}{9}, \frac{49}{9}$

37) 5 , 9 , -6

الوحدة الخامسة :

1) 690 3) 0 5) -3

7) $\frac{1}{2}$ 9) ∞ 11) 6

13) غير موجودة 15) متصل 17) غير متصل

19) غير متصل 21) $\frac{1}{4}$ 23) y= -3x+5

25) f'(x) = -2x 27) f'(x) = h'(x) . I(x) + h(x) I'(x)

29) $\frac{dy}{dx} = 8x^3-9x^2-8x+12$ 31) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y - y^3}{x + 3xy^2}$

37) a) $(-\infty,0] \cup \left[\frac{1}{6}, \infty\right)$: متزايد على الفترة) $\left[0, \frac{1}{6}\right]$ متناقص على الفترة

b) Max = 15 , min = $\frac{1619}{108}$

39) 21 41) 20 23) 25

45) 1) [10 , 80] , 2) $(-\infty,10] \cup [80, \infty)$, 3) 80

الوحدة السادسة :

1) $\frac{x^2}{2}+5x+c$ 3) $\frac{-1}{x}+c$ 5) $\frac{1}{3}$

7) $\frac{15}{4}$ 9) 10 11) 144

13) $2\left(\sqrt{17}-\sqrt{20}\right)$ 15) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{2}+2$ 17) 8

19) $\frac{dy}{dx}=\frac{2\ln x}{x}$

21) $\frac{dy}{dx}=\left[loy_2\left(x^2-2x\right)\right]^3+\left(6x^2-6x\right)\ln 2\left[\log_1\left(x^2-2x\right)\right]^2$

23) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x\ln x}$

25) $\frac{dy}{dx}=\frac{(x+8)^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{x^3+1}}{x^4-5x+4}\left[\frac{2}{3(x+8}+\frac{3x^2}{2(x^3+1)}-\frac{4x^2-5}{x^4-5x+4}\right]$

27) $\frac{-1}{2}\left[\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\right]$ 29) $\left(\sqrt{10}-1\right)$ 31) $\frac{1}{2}$

33) 36 35) $\frac{1}{6}$ 37) 8

39) 4.5 41) 2640 43) $\frac{64}{3}$

المراجـــع

1- Calculus, Lipman Bers, 1969.

2- Calculus and Analytic geometry, Williem H. Durfee, 1971.

3- Concepts of Calculus I, A.H. Lightstons, 1965.

4- Calculus and Analytic geometry, G.B. Thomas, R.L. Finney, 5th edition, 1979.

5- Calculus with Analytic geometry, E.W. Swokeowski, 1979.

6- Elementary Differential Equation with application, 2nd ed., W.R. Derrick, S.I. Grossman, 1981.

7- The elements of real analysis, R.G. Bartle, 2nd ed., 1976.

8- Higher Mathematics, V.S. Shipachev. 1988.

9- Problem Book in mathematics, O.N. A fanasyeva and other's, 1989.

10- Calculus, Howard Anton, 6th ed., 1999.

11- Brief Calculus for management and the life and social sciences, tand, 1990 .

12- Quantitative methods, Clark and Friedlop , 1988 .

13- Mathematics for economists, weintraub, 1982.

14- Mathematics for Economics anfd Business, Jaques, 1995.

15- Finite Mathematics, Sullinan, 1988.

16- مبادىء التفاضل والتكامل، د. توفيق انطون، 1972.

17- مبادىء الرياضيات تفاضل وتكامل، د. علي عزيز علي وآخرون، 1980.

18- التفاضل والتكامل المتقدم، مواري د. سبيجل، 1977.

19- التفاضل والتكامل، د. محمد ابو صالح وآخرون، 1985.

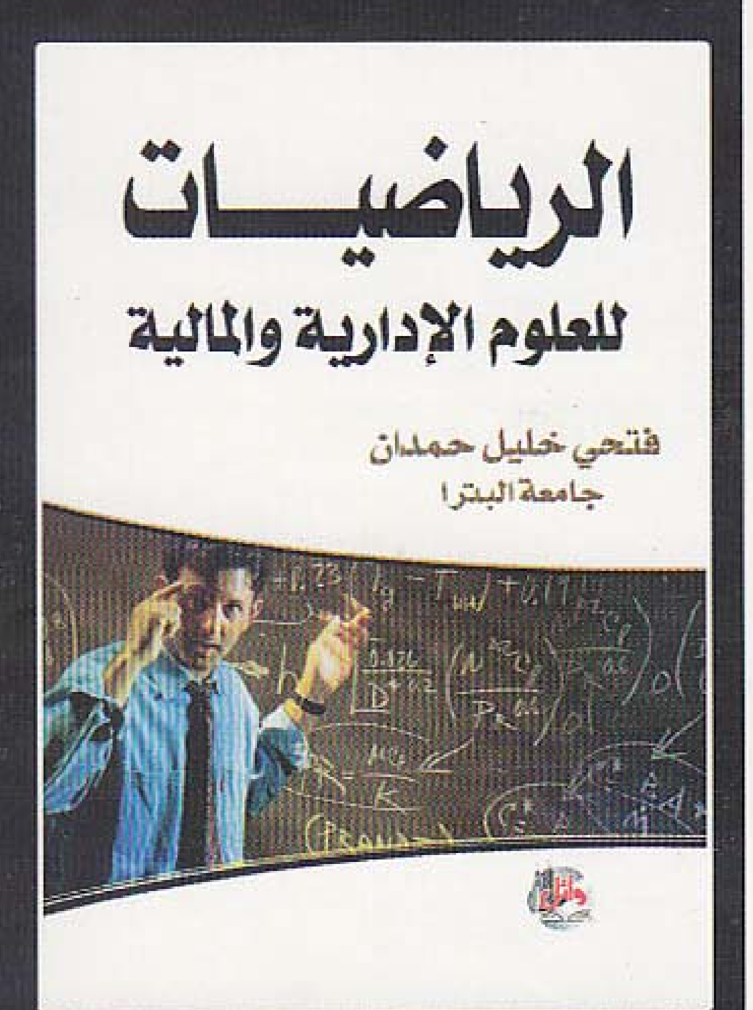
20- الرياضيات، فتحي خليل وآخرون، .1990

21- الرياضيات العامة، د. احمد عثمان وآخرون، .1997

22- التفاضل والتكامل، كامل فليفل، .1999

23- الرياضيات للصف الثاني الثانوي، وزارة التربية والتعليم (الاردن) 1998.

24- الرياضيات لطلبة الاقتصاد والعلوم الادارية، أ.د. محمد الدليمي وآخرون، 2000 .









تطلب منشوراتنا من

عمان : مكتبة وائل - ش. الجمعية العلمية الملكية - مقابل بوابة الجامعة الأردنية الشمالي هاتف : 5335837 6 962+ - فاكس : 5331661 6 962+ - ص.ب (1746) - الجبيهة

عمان : دار وائل للنشر - وسط البلد - مجمع الفحيص التجاري - تلفاكس : 4627627 6 962+

عمان : دار وائل للنشر - شارع الجمعية العلمية الملكية - مبنى الجامعة الأردنية الأستثماري الثاني هاتف : 5338410 6 962+ فاكس : 5338413 6 962+

الشارقة : مكتبة الجامعة - هاتف : 5726001 6 971+ ص.ب (4540)

بيروت : دار الكتب العلمية تلفاكس : 804811 - 804810 5 961+ ص.ب (11 - 9424)

القاهرة : دار الكتاب الحديث - 94 شارع عباس العقاد - هاتف : 992 52 27 202+

القاهرة : دار العلوم للنشر والتوزيع - هاتف : 0124068553 - 0127221936

الرياض : مكتبة جرير .. ليست مجرد مكتبة. المركز الرئيسي - هاتف : 14626000 966+ الرياض - شارع عاليا - شارع الأمير عبد الله - شارع عقبة بن نافع - وكافة فروعها جدة مكة المكرمة - القسيم - الدمام - الإحساء - الدوحة - أبو ظبي - الكويت.

الرياض : مكتبة العبيكان - العليا - طريق الملك فهد مع تقاطع العروبة وكافة فروعها في الدمام - ابها - المدينة المنورة - الإحساء - القصيم - حفر الباطن - حائل .

الرياض : الدار الصولتية - هاتف : 4968016 9661+ فاكس : 4967536 9661+

جدة : مكتبة كنوز المعرفة للمطبوعات والأدوات المكتبية. جدة - الشرقية - شارع الستين هاتف : 6514222 - 6510421 - فاكس : 6570628

جدة : الدار الصولتية - هاتف : 6177877 9662+ - فاكس : 6172364 9662+

جدة : دار حافظ للنشر والتوزيع - شارع الجامعة - هاتف : 6892860 9662+

بغداد : مكتبة الذاكرة - الاعظمية - مجاور السفارة الهندية هاتف : 4257628 - تلفاكس : 4259987 - الثريا : 621241714 8821+

الدوحة : مكتبة جرير .. ليست مجرد مكتبةطريق سلوى- تقاطع رمادا- هاتف: 4440212 974+

المنامة : جامعة دلمون للعلوم والتكنولوجيا - شارع المعارض هاتف : 17295500 -7294400 9731+

دمشق : دار المكتبي للنشر والتوزيع - حلبوني - هاتف : 2248433 11 963+

رام الله : شركة جلاكسي لأنظمة المعلومات - هاتف : 2958444 02 97+

الكويت : الكويت - مكتبة دار ذات السلاسل - هاتف : 2466255 965+

الجزائر : الدار الجامعية للكتاب - ولاية بو مرداس - هاتف : 21324872766+

الجزائر : أمين للتسويق الدولي للكتاب العلمي والجامعي تلفاكس : 773355 21321+ ص.ب (75) حسين داي (16040) الجزائر

طرابلس : ليبيا - دار الرواد - ذات العماد - برج (4) هاتف : 3350332 821 21+

غريان : ليبيا - المكتبة الجامعية - تلفاكس : 630730 841 21+

صنعاء : الدار العلمية للكتب الجامعية - هاتف : 215054 - تلفاكس : 216649 1 967+

الخرطوم : الدار العلمية للكتب الجامعية - هاتف : 466291 83 - فاكس : 491814 83 1 249+

انواكشوط : موريتانيا - المكتبة التجارية الموريتانية الكبرى GRA.LI.CO-Ma هاتف : 5253009 222+ ص.ب (341) انواكشوط

www.darwael.com E-mail:wael@darwael.com

ومن كافة دور النشر العربية والمكتبات في الوطن العربي